



Fonctions réciproques

Exercice 1

On considère les fonctions suivantes :

$$f_1 :]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

$$\varphi_1 :]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -x + \sqrt{x^2 - x}$$

$$f_2 : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{x+1}$$

$$\varphi_2 : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{-x^2}{2x+1}$$

1. a) Montrer que f_1 réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $[0, 1[$.
 b) Déterminer $f_1^{-1}(x)$ pour tout x de $[0, 1[$.
2. a) Montrer que f_2 réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$.
 b) Expliciter $f_2^{-1}(x)$ pour tout x de $[0, 1[$.
3. a) Démontrer que $f_2^{-1} \circ f_1 = \varphi_1$ et que $\varphi_2 = f_1^{-1} \circ f_2$.
 b) En déduire le sens de variation de φ_1 et celui de φ_2 .
 c) Montrer que les fonctions φ_1 et φ_2 sont réciproques l'une de l'autre. Qu'en déduit-on pour leurs courbes Γ_1 et Γ_2 représentations graphiques respectives, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, des fonctions φ_1 et φ_2 ?

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 b) En déduire que la courbe (C) admet deux asymptotes dont on donnera une équation.
 2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x réel,
- $$f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$
3. a) En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.



Fonctions réciproques

b) Montrer que pour x de J , $f^{-1}(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Tracer (C) et la courbe (C') de f^{-1} .

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = \sqrt{2 \cot x}$

1. Montrer que f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ puis calculer $f'(x)$ pour x de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2. Etudier la dérivabilité de f à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

3. Montrer que f réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, +\infty[$.

4. Montrer que la fonction réciproque f^{-1} de f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour

x de $[0, +\infty[$, on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{-4x}{4+x^4}$.

5. On pose pour tout x de $]0, +\infty[$, $g(x) = f^{-1}(\sqrt{2x}) + f^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)$.

a) Calculer $f^{-1}(\sqrt{2})$.

b) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $g'(x)$.

c) En déduire que $g(x) = \frac{\pi}{2}$.



Fonctions réciproques

Exercice 1

1. a) la fonction $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ est dérivable et strictement positive sur $] -\infty, 0[$ donc f_1 est

$$\text{dérivable sur }] -\infty, 0[. \text{ Pour tout } x < 0, f_1'(x) = \frac{-\frac{1}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{x-1}}} = -\frac{1}{2(x-1)^2 \sqrt{\frac{x}{x-1}}} < 0.$$

Ainsi f_1 est continue et strictement croissante sur $] -\infty, 0[$ donc f_1 réalise une bijection de

$$]-\infty, 0[\text{ sur } f_1(]-\infty, 0[) = \left[f_1(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) \right[= \left[0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x+1}} \right[= [0, 1[.$$

$$\text{b) } \begin{cases} x \leq 0 \\ f_1(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y < 1 \\ f_1^{-1}(y) = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_1(x) = y &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{x-1}} = y \Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{x-1}} = y \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x-1} = y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = y^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{y^2-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y^2-1} + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{y^2-1} \end{aligned}$$

$$\text{Par suite, pour tout } x \text{ de } [0, 1[, f_1^{-1}(x) = \frac{x^2}{x^2-1}.$$

2. a) f_2 est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout x de $[0, +\infty[$, $f_2'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$

D'où f_2 est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, c'est-à-dire que f_2 réalise une

$$\text{bijection de } [0, +\infty[\text{ sur } f_2([0, +\infty[) = \left[f_2(0), \lim_x f_2 \right[= \left[0, \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x+1} \right[= [0, 1[.$$

$$\text{b) } \begin{cases} x \geq 0 \\ f_2(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y < 1 \\ f_2^{-1}(y) = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) = y &\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = y \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x+1} = y \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = 1-y \\ &\Leftrightarrow x+1 = \frac{1}{1-y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{1-y} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y} \end{aligned}$$

$$\text{Par suite, pour tout } x \text{ de } [0, 1[, f_2^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}.$$



Fonctions réciproques

3. a) Pour tout x de $]-\infty, 0]$,

$$\begin{aligned} f_2^{-1} \circ f_1(x) &= f_2^{-1}(f_1(x)) = \frac{f_1(x)}{1 - f_1(x)} = \frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})}{(x-1) - 1} \\ &= \sqrt{x(x+1)} - x = -x + \sqrt{x^2 + x} = \varphi_1(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1^{-1} \circ f_2(x) &= f_1^{-1}(f_2(x)) = \frac{(f_2(x))^2}{(f_2(x))^2 - 1} = \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 1} = \frac{x^2}{x^2 - (x+1)^2} = \frac{x^2}{-2x-1} \\ &= \frac{-x^2}{2x+1} = \varphi_2(x) \end{aligned}$$

b) Pour tout $x < 0$, $\varphi_1'(x) = f_1'(x) \cdot (f_2^{-1})'(f_1(x)) < 0$ car $f_1'(x) < 0$ et $(f_2^{-1})'(f_1(x)) > 0$.

Donc φ_1 est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

Pour tout $x \geq 0$, $\varphi_2'(x) = f_2'(x) \cdot (f_1^{-1})'(f_2(x)) < 0$ car $f_2'(x) > 0$ et $(f_1^{-1})'(f_2(x)) < 0$.

Donc φ_2 est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

c) On a : $\varphi_1^{-1} = (f_2^{-1} \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2 = \varphi_2$.

Ainsi, les fonctions φ_1 et φ_2 sont réciproques l'une de l'autre.

On en déduit que leurs courbes représentatives respectives Γ_1 et Γ_2 sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 2:

1. a) Remarquons d'abord que pour tout x réel, $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}} = -1.$$



Fonctions réciproques

b) La droite $D : y = 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ et la droite $D' : y = -1$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

2. La fonction $x \mapsto x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc

$x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - (x+1) \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}}{x^2 + 2x + 2} = \frac{x^2 + 2x + 2 - (x+1)^2}{(x^2 + 2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \\ &= \frac{1}{(x^2 + 2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \end{aligned}$$

3. a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$$J = f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-1, 1[.$$

b) Pour tout x de $] -1, 1[$,

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1}(x) &= f[f^{-1}(x)] = \frac{f^{-1}(x) + 1}{\sqrt{[f^{-1}(x)]^2 + 2f^{-1}(x) + 2}} \\ &= \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\left(-1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 + 2\left(-1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + 2}} \\ &= \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} - 2 + \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} + 2}} \\ &= \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

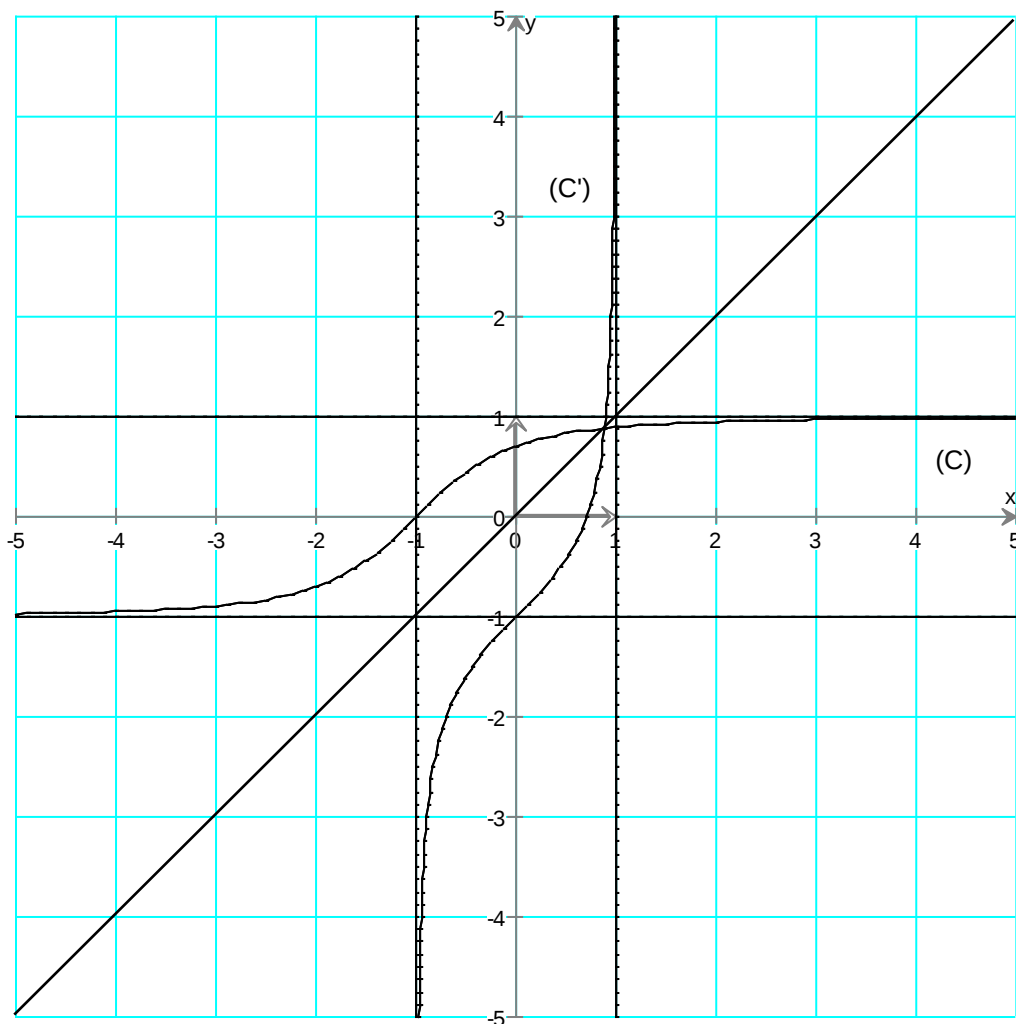
Par suite, pour tout x de $] -1, 1[$, $f^{-1}(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.



Fonctions réciproques

4. Les courbes (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite $\Delta: y = x$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f(x)		



Fonctions réciproques

Exercice 3

1. La fonction $x \mapsto \cot x$ est dérivable et strictement positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc f est

dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout x de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \frac{2 \cot'(x)}{2\sqrt{2 \cot x}} = \frac{-1 - \cot^2 x}{\sqrt{2 \cot x}}$.

$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sqrt{2 \cot x}}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2 \tan(h)}}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} -\sqrt{\frac{2}{h}} \cdot \sqrt{\frac{\tanh}{h}} = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

3. f est continue et strictement décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc f réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\text{sur } f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)\right] = [0, +\infty[.$$

4. f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout x de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) < 0$ donc f^{-1} est dérivable sur

$$f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]0, +\infty[.$$

$$\text{On a : } \begin{cases} 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ f(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ f^{-1}(y) = x \end{cases} \quad \text{et} \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = -\frac{\sqrt{2 \cot x}}{1 + \cot^2 x}$$

$$\text{Or } y = \sqrt{2 \cot x} \Leftrightarrow 2 \cot x = y^2 \Leftrightarrow \cot x = \frac{y^2}{2}, \text{ donc } (f^{-1})'(y) = -\frac{y}{1 + \left(\frac{y^2}{2}\right)^2} = -\frac{4y}{4 + y^4}$$

$$\text{Ainsi, pour tout } x \text{ de }]0, +\infty[, (f^{-1})'(x) = \frac{-4x}{4 + x^4}.$$

Etudions à présent la dérivabilité de f^{-1} à droite en 0 :

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(0)}{y - 0} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}}} = 0 \quad \text{donc } f^{-1} \text{ est dérivable à}$$

droite en 0 et $(f^{-1})'(0) = 0$



Fonctions réciproques

Comme $(f^{-1})'(0) = 0 = -\frac{4 \times 0}{4 + 0^4}$ alors on peut conclure que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

pour x de $]0, +\infty[$, on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{-4x}{4 + x^4}$.

5. Pour tout x de $]0, +\infty[$, $g(x) = f^{-1}(\sqrt{2x}) + f^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)$.

a) On a $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2 \cot \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$ et $\frac{\pi}{4} \in]0, \frac{\pi}{2}]$ par conséquent $f^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$.

b) Les fonctions $x \mapsto \sqrt{2x}$ et $x \mapsto \sqrt{\frac{2}{x}}$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$. D'autre part f^{-1} est

dérivable sur $]0, +\infty[$ donc les fonctions $x \mapsto f^{-1}(\sqrt{2x})$ et $x \mapsto f^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)$ sont dérivables

sur $]0, +\infty[$. Par suite, g est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\text{Pour tout } x > 0, \quad g'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x}}(f^{-1})'(\sqrt{2x}) + \left(-\frac{\frac{2}{x^2}}{2\sqrt{\frac{2}{x}}}\right)(f^{-1})'\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \left(-\frac{4\sqrt{2x}}{4 + 4x^2}\right) - \frac{1}{x^2 \sqrt{\frac{2}{x}}} \cdot \left(-\frac{4\sqrt{\frac{2}{x}}}{4 + \frac{4}{x^2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= -\frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + x^2}$$

$$= 0$$

c) La fonction g est donc constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ d'où il existe un réel c tel que pour tout x de $]0, +\infty[$, $g(x) = c$.

Or $g(1) = 2f^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2}$ donc $c = \frac{\pi}{2}$.

Par suite, pour tout x de $]0, +\infty[$, $g(x) = \frac{\pi}{2}$.