Fonction logarithme népérien

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$.

1. Etudier les variations de f sur $]0\ ;+\infty[$ puis construire sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.

2. Soit A, B , C et D les points suivants de (C) :

- A est d'abscisse a et est le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
- B est d'abscisse b et est le point où la tangente à (C) passe par l'origine du repère.
- C est d'abscisse c et est le point où la tangente à (C) est parallèle à l'axe des abscisses.
- D est d'abscisse d et est le point où la dérivée seconde de f s'annule.

Montrer que a, b, c, d sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

Exercice 2 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x\ln\left(x^2+1\right)$.
On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et étudier la parité de f .

2. Etudier le sens de variations de f sur $[0\ ;+\infty[$, puis déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation " $f(x) = x$ "
Pour x réel, on pose $g(x) = a$, où a est le réel tel que $f(a) = x$.

5. Justifier que l'application g est bien définie pour tout x réel.

6. Déterminer $g(0)$ et $g\left(\sqrt{e-1}\right)$.

7. Représenter les courbes représentatives (C) et (C') respectives de f et de g sur une même figure.

Fonction logarithme népérien

Exercice 3 :

On définit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \ln x \ , \ si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Justifier que f est continue en 0.

2. Etudier la dérivabilité de f en 0.

3. Etudier les variations de f sur $[0\ ;+\infty[$, puis tracer l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = x + 2\dfrac{\ln x}{x}$. (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$; unité 2 cm .

1) a - Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.

b - Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et vérifier que la droite (D) d'équation y = x est une asymptote à (C) .

c - Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (D).

2) Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction f ' dérivée de f.

x	0		e		$e\sqrt{e}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	⋮	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↘	$1-e^{-3}$	↗	1

a - Montrer que f est strictement croissante sur son domaine de définition et dresser son tableau de variations .

b - Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point G d'abscisse e.

c - Démontrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion L.

d - Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une racine unique α et vérifier que $0{,}75 < \alpha < 0{,}76$.

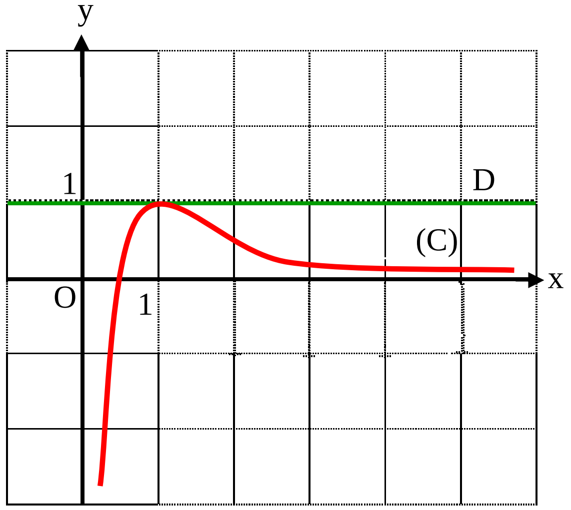
3) Tracer (D) , (T) et (C) .

4) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations x = 1 et x = e .

Fonction logarithme népérien

Exercice 5

On donne dans le repère orthonormé ci -dessous, la courbe représentative (C), d'une fonction f définie sur] 0 ; + ∞ [. la droite(D) d'équation y = 1 est tangente à la courbe (C) au point (1;1).



1) Déterminer f(1) et f '(1) et dresser le tableau de variations de f.

2) La fonction f est donnée par f(x) = $\dfrac{a+b(\ln x)}{x}$, démontrer que a = b = 1.

3) Déterminer l'abscisse du point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses et résoudre l'inéquation f(x) > 0.

4) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et la droite d'équation x =1.

5) F est une primitive de f sur] 0 ; + ∞ [, déterminer, suivant les valeurs de x, le sens de variations de F.

Fonction logarithme népérien

Corrigé

Exercice 1:

1. Pour tout x >0, f'(x) = $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}(1+\ln x) = -\frac{\ln x}{x^2}$.

Donc, $f\,'(x)$ est < 0 si et seulement si x > 1 d'où le tableau de signes de la dérivée et le tableau de variations de la fonction f .

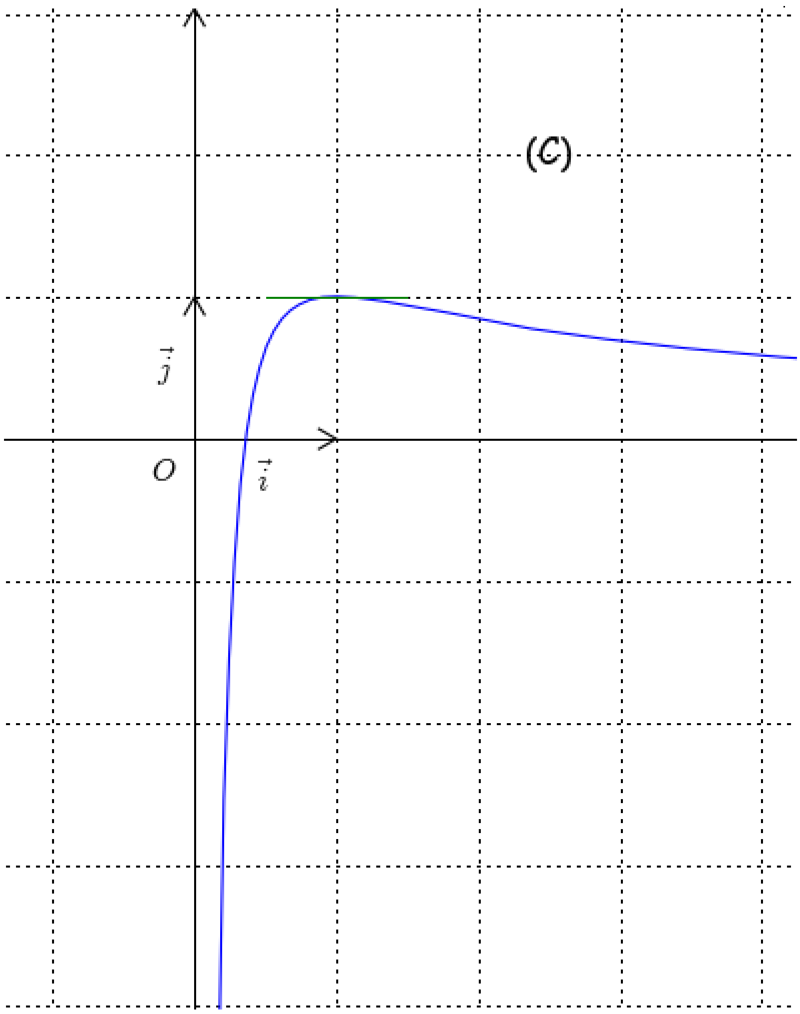
De plus, on sait qu $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} 1+\ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	$-\infty$	↗	1	↘	0

La droite des ordonnées est asymptote à la courbe ($\mathcal{C}$).

La droite des abscisses est asymptote à la courbe ($\mathcal{C}$) au voisinage de $+\infty$.



Fonction logarithme népérien

2. Déterminons des valeurs a , b, c et d.

A est le point d'intersection de (C) et $(O,\vec{i})$ d'où : f(a) = 0 donc a = e^{-1} .

En B, la tangente (T_B) à (C) passe par l'origine du repère, donc une équation

de cette tangente est: $y = f\,'(b)(x-b) + f(b)$.

$$O \in (T_B) \Leftrightarrow 0 = f'(b)(-b) + f(b) \quad \Leftrightarrow bf'(b) = f(b)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\ln b}{b} = \frac{1+\ln b}{b} \qquad \Leftrightarrow \ln b = -\frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow b = e^{-\frac{1}{2}}$$

En C, la tangente à la courbe (C) est parallèle à l'axe $(O,\vec{i})$. On a donc c = 1 .
D a une abscisse qui annule la dérivée seconde de f .
Or pour tout x > 0 , $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x^3}$.

Il en résulte que : $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2\ln x - 1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$ D'où $d = e^{\frac{1}{2}}$.

On remarque alors que : $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{d}{c} = e^{\frac{1}{2}}$.

a, b , c et d sont bien trois termes consécutifs d'une une suite géométrique.

<u>Exercice 2:</u>

1. Pour tout x réel, $x^2 + 1 > 0$, donc $\ln(x^2 + 1)$ est bien défini sur $\mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout x réel, on a : $f(x) = -x\ln\left[(-x)^2+1\right] = -x\ln\left(x^2+1\right) =$ $-f(-x)$ donc
f est impaire.

2. Pour tout x de $[0,+\infty[$, $f'(x) = \ln\left(x^2+1\right) + x.\dfrac{2x}{x^2+1} = \ln\left(x^2+1\right) + \dfrac{2x^2}{x^2+1} > 0$ donc f
est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(x^2+1\right) = +\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(x^2+1\right) = +\infty$ donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

Fonction logarithme népérien

4. On a donc

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x\ln\left(x^2+1\right)=x \Leftrightarrow x\left[\ln\left(x^2+1\right)-1\right]=0 \Leftrightarrow x=0 \;\; ou \;\; \ln\left(x^2+1\right)=1$$

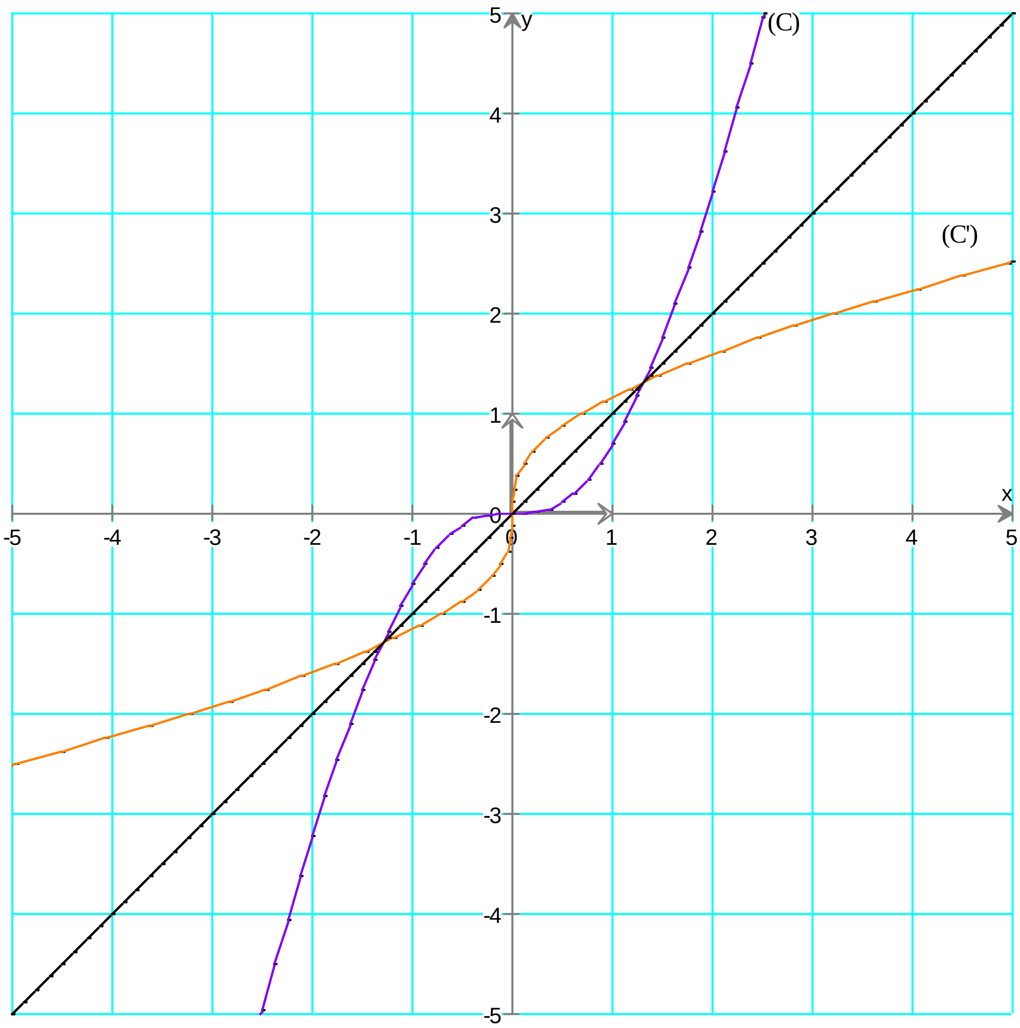
Or $\ln\left(x^2+1\right)=1 \Leftrightarrow x^2+1=e \Leftrightarrow x^2=e-1 \Leftrightarrow x=-\sqrt{e-1} \;\; ou \;\; x=\sqrt{e-1}$

d'où l'équation f(x) = 0 admet trois solutions distinctes:
$0,\; x=-\sqrt{e-1} \;\; et \;\; x=\sqrt{e-1}$.

5. f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})=\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=\mathbb{R}$.
D'où f admet une fonction réciproque g définie sur IR.

6. f (0) = 0 donc g(0) = 0.
On sait que $f\left(\sqrt{e-1}\right)=\sqrt{e-1}$ donc $g\left(\sqrt{e-1}\right)=\sqrt{e-1}$

7. f et g sont réciproques l'une de l'autre. Leurs courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation y=x.



Fonction logarithme népérien

Exercice 3:

1. On sait que : pour tout entiers naturels m et n , $\lim_{x\to 0^+} x^m.\ln^n x = 0$ donc $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = 0$.

   Il en résulte que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ et par suite f est continue à droite en 0.

2. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ donc f dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.
3. $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x^2 \ln x = +\infty$

   f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout x > 0,

   $f'(x) = 2x\ln x + x^2.\dfrac{1}{x} = 2x\ln x + x = 2x\left(\ln x + \dfrac{1}{2}\right)$

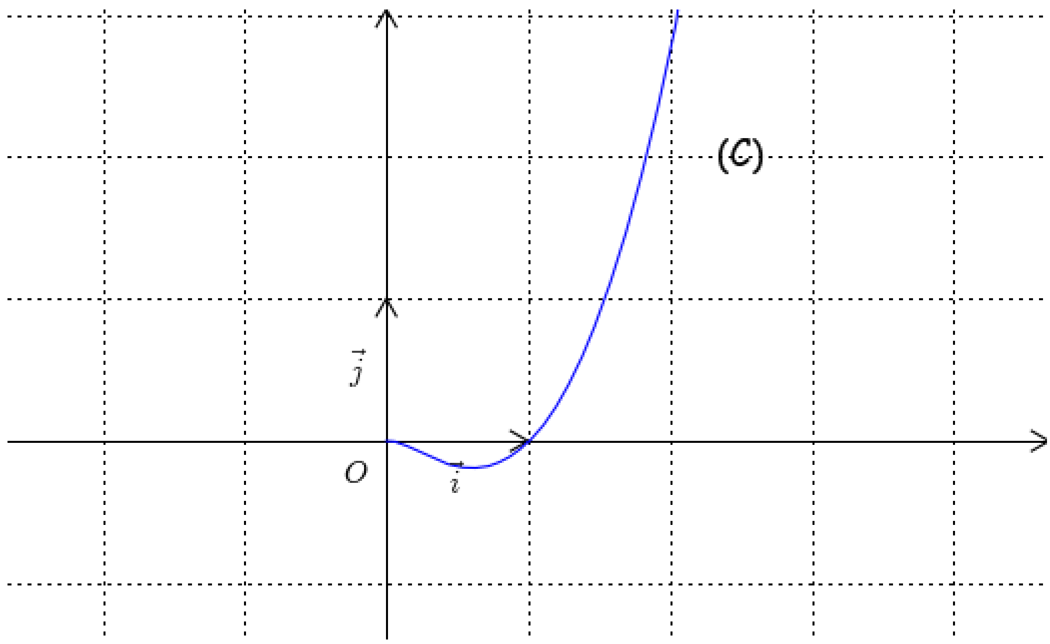
   On en déduit que pour $x > 0$, $f\,'(x)$ est du signe de [2 ln(x) + 1] .

   D'où $f\,'(x) = 0$ pour $x = 0$ ou $x = e^{-\frac{1}{2}}$.

   De plus : $f\,'(x) > 0$ si $x > e^{-\frac{1}{2}}$ et $f\,'(x) < 0$ si $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$.

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
f'(x)	0	-	0	+	
f(x)	0	↘	$-\dfrac{e^{-1}}{2}$	↗	$+\infty$

Fonction logarithme népérien



Exercice 4

1. a) $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ d'où la droite $\left(O, \vec{j}\right)$ est une asymptote à (C).

b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\sqrt{2}$; $\lim_{x\to +\infty} [f(x) - x] = 0$ donc la droite (D) d'équation y = x est une asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Pour tout x >0, $f(x) - x = 2\frac{\ln x}{x}$.

Pour x = 1, (C) rencontre (D).
Pour 0 < x < 1, f(x) - x < 0 donc (C) est au-dessous de (D).
Pour x > 1, (C) est au-dessus de (D).

2.a) Pour tout x >0, $f'(x) \geq 1 - \frac{1}{e^3} > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

x	0		$+\infty$
f (x)	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) Une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse e est :

$$y = f'(e)(x - e) + f(e) \quad \Leftrightarrow \quad y = x - e + e + \frac{2}{e} \Leftrightarrow \quad y = x + \frac{2}{e}$$

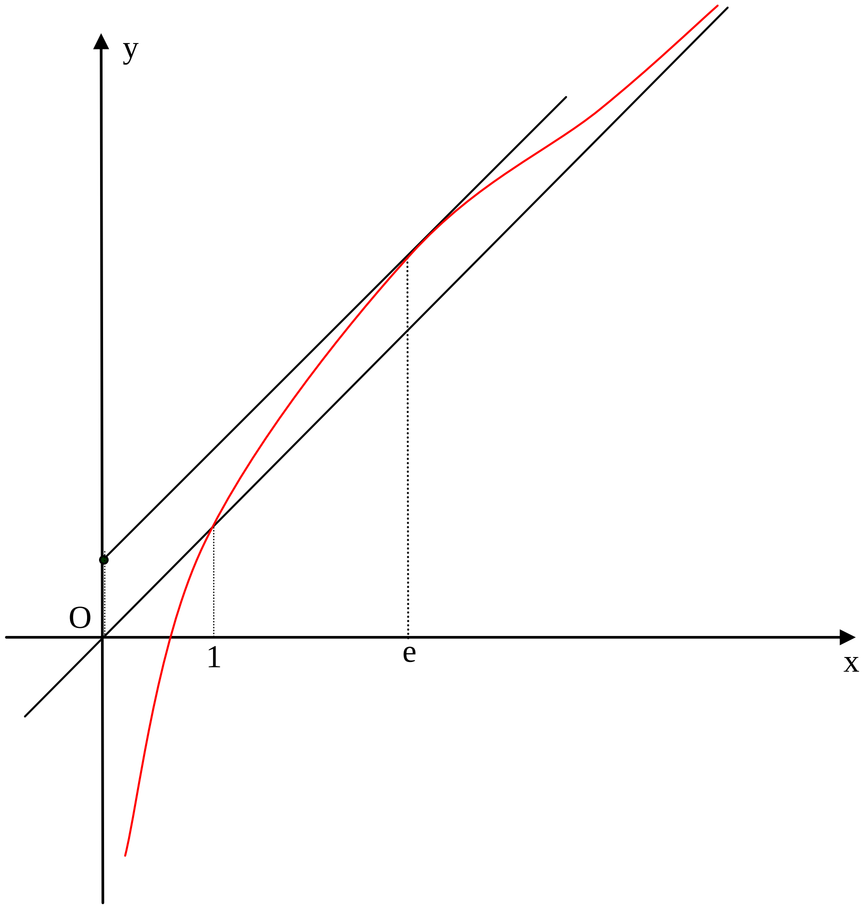
Fonction logarithme népérien

c) f ''(x) s'annule pour x = $e\sqrt{e}$ en changeant de signe, donc (C) admet un point d'inflexion L d'abscisse $e\sqrt{e}$.

d) f est continue et change de signe sur son domaine, f(x) = 0 admet au moins une racine α , en plus f est strictement croissante, donc α est unique.

f (0,75) ×f (0,76) = -0,017×0,377 < 0, donc 0,75 < α < 0,76.

3.



4. A= $\int_{1}^{e} 2\frac{\ln x}{x}\,dx$ ua = $\left[\ln^2 x\right]_1^e$ = 1ua , donc A = 4 cm^2.

Exercice 5

1. f(1) = 1 et f'(1) = 0

x	0		1		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2. f(1) = 1 donne a = 1

   pour tout x >0, f'(x) = $\frac{b-a-b\ln x}{x^2}$;

   f'(1) = 0 donne b –a = 0 donc b = a d'où b = 1.

Fonction logarithme népérien

3. (C) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse x si, et seulement si, f(x) = 0
   donc $1 + \ln x = 0$ d'où $x = e^{-1}$.
   $f(x) > 0$ pour $x > e^{-1}$.

4. $A = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1+\ln x}{x}\, dx$ ua .

   On pose : $u(x) = 1 + \ln x$ donc $u'(x) = \frac{1}{x}$, il en résulte que :

   $$\int_{e^{-1}}^{1} \frac{1+\ln x}{x}\, dx = \int_{e^{-1}}^{1} u(x).u'(x) dx = \frac{1}{2}\left[u^2(x)\right]_{e^{-1}}^{1} = \frac{1}{2}\left[(1+\ln x)^2\right]_{e^{-1}}^{1} = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

   $A = \frac{1}{2}$ ua.

5. Pour tout $x > 0$, $F'(x) = f(x)$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
F'(x)	‖	—	0	+	

Ainsi , F est strictement décroissante sur $[0, e^{-1}]$ et est strictement

croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$.