

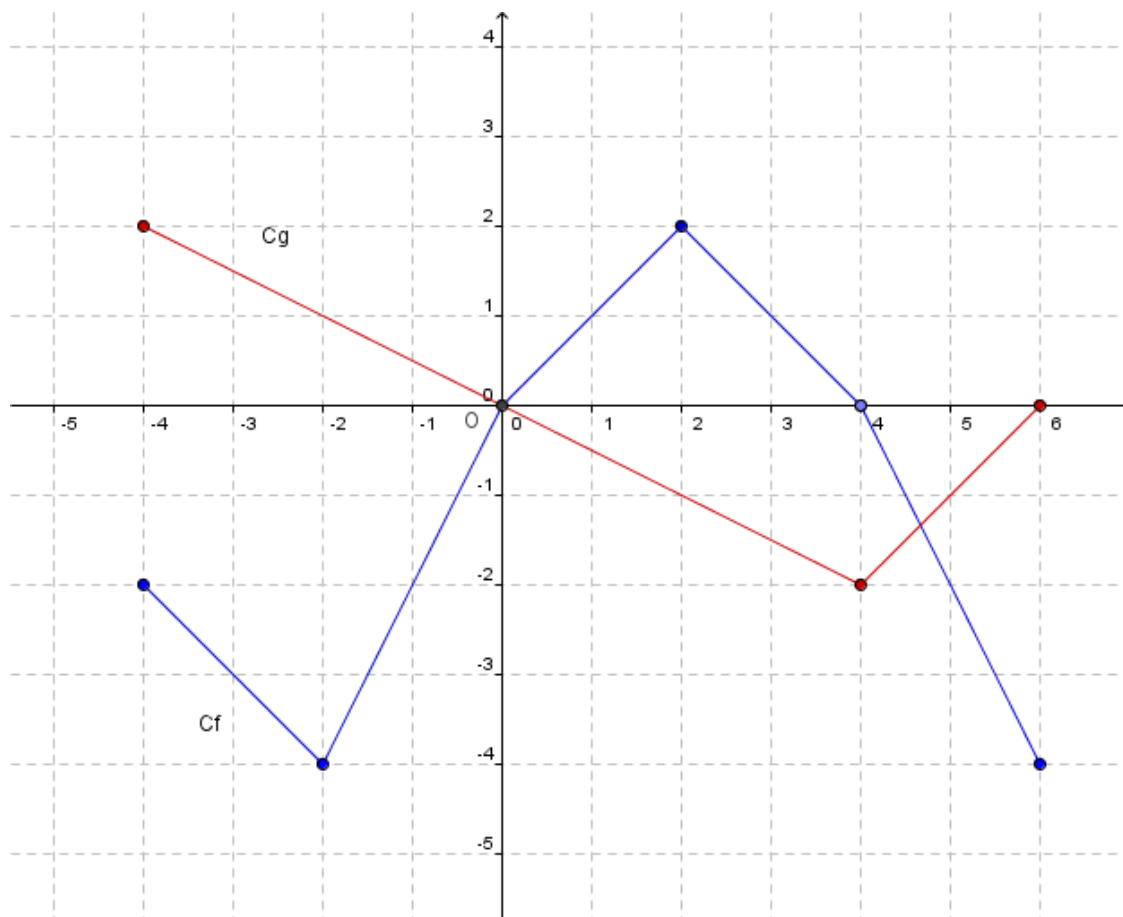


Continuité et limite d'une composée

Exercice 1

Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $[-4, 6]$ données par leur représentation graphique dans un repère orthonormé.

La courbe représentative de f est tracée en bleu et celle de g est tracée en rouge.



1. Donner en utilisant le graphique ci-dessus :

- $g \circ f(-4)$, $g \circ f(-2)$, $g \circ f(-1)$, $g \circ f(0)$, $g \circ f(2)$, $g \circ f(4)$ et $g \circ f(6)$.
- $f \circ g(-4)$, $f \circ g(-2)$, $f \circ g(-1)$, $f \circ g(0)$, $f \circ g(2)$, $f \circ g(4)$ et $f \circ g(6)$.

2. En déduire $g \circ f([-4, -2])$, $g \circ f([-2, 0])$, $g \circ f([0, 4])$ et $f \circ g([-4, 4])$.

Exercice 2:

On considère les fonctions f , g et h définies par $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = \sqrt{x}$.

Donner l'ensemble de définition et l'expression des fonctions composées suivantes :

$$g \circ f, f \circ g, h \circ f, f \circ h, g \circ h \text{ et } h \circ g.$$



Continuité et limite d'une composée

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[-9, +\infty[$ par $f(x) = 2 + \sqrt{x+9}$ et g la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 4x - 5$.

1. Montrer que pour tout x de $[2, +\infty[$, $f \circ g(x) = x$.
2. Montrer que pour tout x de $[-9, +\infty[$, $g \circ f(x) = x$.
3. Les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont elles égales ?

Exercice 4 :

1. Soit f et g les fonctions définies sur $] -1, 1[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ et $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$.
Déterminer pour tout x de $] -1, 1[$, $f \circ f(x)$ et $g \circ f(x)$.
2. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$ et $-1 \leq g(x) \leq 2$.
Montrer que pour tout x réel, $-5 \leq f \circ g(x) \leq 1$.

Exercice 5 :

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = 5$.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(2-x)$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(2 \sin x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f\left(\sqrt{2-x+x^2}\right)$.



Continuité et limite d'une composée

Exercice 1

1. a) $g \circ f(-4) = g(f(-4)) = g(-2) = 1$; $g \circ f(-2) = g(f(-2)) = g(-4) = 2$;
 $g \circ f(-1) = g(f(-1)) = g(-2) = 1$; $g \circ f(0) = g(f(0)) = g(0) = 0$;
 $g \circ f(2) = g(f(2)) = g(2) = -1$; $g \circ f(4) = g(f(4)) = g(-2) = 1$;
 $g \circ f(6) = g(f(6)) = g(-4) = 2$.
- b) $f \circ g(-4) = f(g(-4)) = f(2) = 2$; $f \circ g(-2) = f(g(-2)) = f(1) = 1$;
 $f \circ g(-1) = f(g(-1)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$; $f \circ g(0) = f(g(0)) = g(0) = 0$;
 $f \circ g(2) = f(g(2)) = f(-1) = -2$; $f \circ g(4) = f(g(4)) = f(-2) = -4$;
 $f \circ g(6) = f(g(6)) = f(0) = 0$.
2. $g \circ f([-4, -2]) = g(f([-4, -2])) = g([-4, -2]) = [1, 2]$.
 $g \circ f([-2, 0]) = g(f([-2, 0])) = g([-4, 0]) = [0, 2]$
 $g \circ f([0, 4]) = g(f([0, 4])) = g([0, 2]) = [-1, 0]$
 $f \circ g([-4, 4]) = f(g([-4, 4])) = g([-2, 2]) = [-4, 2]$.

Exercice 2:

- Comme f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sur $\mathbb{R}$.
 Pour tout x réel, $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$.
 Pour tout x réel, $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$.
- $h \circ f(x)$ est définie $\Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.
 Donc l'ensemble de définition de $h \circ f$ est $[-1, +\infty[$.
 Pour tout x de $[-1, +\infty[$, $h \circ f(x) = h(f(x)) = h(x+1) = \sqrt{x+1}$.
- L'ensemble de définition de h est $[0, +\infty[$ et celui de f est $\mathbb{R}$ donc la fonction $f \circ h$ est définie sur $[0, +\infty[$.
 Pour tout x positif, $f \circ h(x) = f(h(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$.



Continuité et limite d'une composée

- L'ensemble de définition de $g \circ h$ est $[0, +\infty[$.

Pour tout x positif, $g \circ h(x) = g(h(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$.

- L'ensemble de définition de $h \circ g$ est $\mathbb{R}$.

Donc pour tout x réel, $h \circ g(x) = h(g(x)) = h(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $[-9, +\infty[$ par $f(x) = 2 + \sqrt{x+9}$ et g la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 4x - 5$.

1. Pour tout x de $[2, +\infty[$,

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 4x - 5) = 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2 + \sqrt{(x-2)^2} = 2 + |x-2| = 2 + x - 2 = x.$$

2. Pour tout x de $[-9, +\infty[$,

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = g(2 + \sqrt{x+9}) = (2 + \sqrt{x+9})^2 - 4(2 + \sqrt{x+9}) - 5 \\ &= x + 13 + 4\sqrt{x+9} - 8 - 4\sqrt{x+9} - 5 \\ &= x \end{aligned}$$

3. Les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ n'ont le même ensemble de définition donc elles ne sont pas égales.

Exercice 4 :

1. Soit f et g les fonctions définies sur $] -1, 1[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ et $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

$$\text{Pour tout } x \text{ de }] -1, 1[, \quad f \circ f(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)-1}{f(x)+1} = \frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1} = \frac{-2}{2x} = -\frac{1}{x}$$

$$\text{et } g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{\frac{x-1}{x+1}+1}{\frac{x-1}{x+1}-1} = \frac{2x}{-2} = -x.$$



Continuité et limite d'une composée

2. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$ et $-1 \leq g(x) \leq 2$.

Remarquons d'abord que, pour tout x réel, $f \circ g(x) = f(g(x)) = 2g(x) - 3$.

Or, pour tout x réel, $-1 \leq g(x) \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2g(x) \leq 4 \Leftrightarrow -5 \leq 2g(x) - 3 \leq 1$.

Il en résulte : , pour tout x réel, $-5 \leq f \circ g(x) \leq 1$.

Exercice 5 :

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = 5$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(2 - x) = f\left(\lim_{x \rightarrow 0} (2 - x)\right) = f(2) = 5 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(2 \sin x) = f\left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2 \sin x)\right) = f\left(2 \sin \frac{\pi}{2}\right) = f(2) = 5 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2(x-1)+3}{x-1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(2 + \frac{3}{x-1}\right) = f\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{x-1}\right)\right) = f(2) = 5 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f\left(\sqrt{2 - x + x^2}\right) = f\left(\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{2 - x + x^2}\right) = f(\sqrt{4}) = f(2) = 5.$$