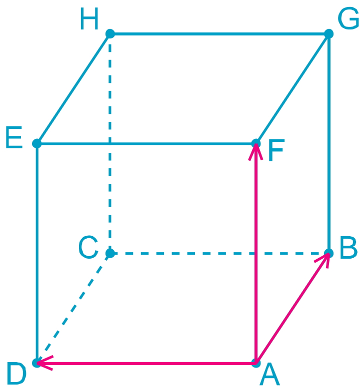
Produit scalaire - Produit vectoriel

Exercice 1

Le repère (A, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}$) formé sur le cube ABCDEFGH est orthonormé direct.
Calculer les produits vectoriels suivants.

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{FH}$.



Dans tous les exercices qui suivent, l'espace est supposé rapporté au repère orthonormé direct ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

Exercice 2

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} -\sqrt{3}+2 \\ \sqrt{3}+2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3\sqrt{3}+1 \\ 3\sqrt{3}+1 \\ -2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace

Déterminer une mesure α de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 3

1) Soients $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}+1 \\ 3+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace.
   a) Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
   b) Qu'on déduit-on pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$?
2) Soient les points A(2,0,0) , B(0,4,0) et C(0,0,3).
   a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}$.
   b) Qu'on déduit-on ?

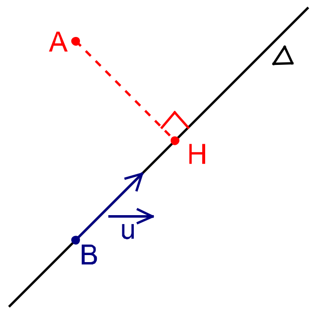
Exercice 4

1) On donne le point A(-3,5,2) et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
   b) Ecrire une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2) Calculer la distance du point B(3,-1,1) au plan (P) puis la distance du point C(-2,0 ,2) au plan (P).

Produit scalaire - Produit vectoriel

Exercice 5

On considère le point A(2,2,1) et une droite Δ définie par l'un de ses points B et par un vecteur directeur $\vec{u}$.

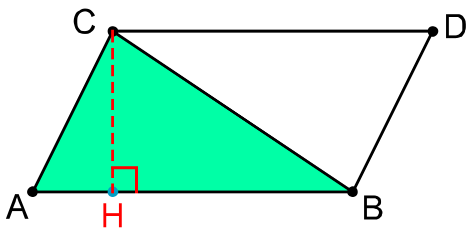


1. Calculer la distance du point A à la droite Δ passant par B(4,2,0) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$.

2. Calculer la distance du point A à la droite D: $\begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 1-\alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 6

Soit les points A(1,2,3) , B(4,2,-1) et C(2,-1,2) de l'espace



1. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC.
   Calculer $\mathcal{A}$.
2. a) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
   b) Donner l'aire $\mathcal{A}'$ de ABCD.

Exercice 7

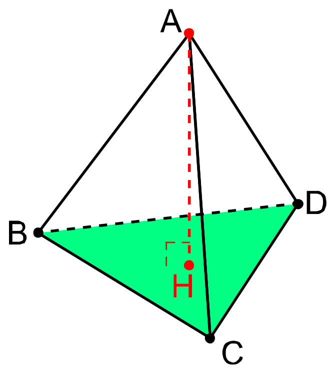
1) Montrer que les points A(1,1,1) , B(-1,2,-1), C(2,3,5) et D(1,0,-1) ne sont pas coplanaires.

2) Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\7\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-3\\7\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

3) Soient A(1,-2,3), $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$.

Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que $\det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AM}) = 0$

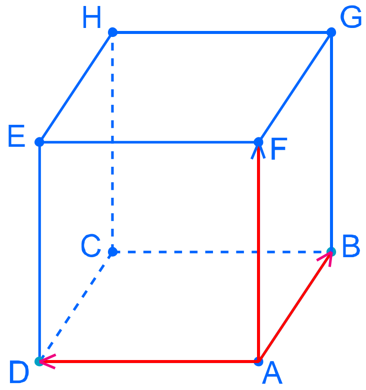
Exercice 8 :



1) On donne les points A(1,1,1) , B(2,0,0) , C(0,3,0) et D(0,0,-2).
   Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
2) a) Calculer la hauteur issue de A du tétraèdre ABCD.
   b) Déterminer une équation du plan (BCD) et retrouver le résultat de la question précédente.

Produit scalaire - Produit vectoriel

Exercice 1



Le repère (A, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}$) est orthonormé direct.

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$ est un vecteur orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, de même sens que le vecteur $\overrightarrow{AE}$ et de norme

$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\| = AB.AD.\sin\left(\widehat{BAD}\right) = 1$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF}$.

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, de même sens que le vecteur $\overrightarrow{AE}$ et de norme

$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\| = AB.AC.\sin\left(\widehat{BAC}\right) = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 1$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}$ est un vecteur orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$, de même sens que le vecteur $\overrightarrow{AE}$ et de norme

$\left\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}\right\| = AC.BD.\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ donc $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AE}$.

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{FH} = \vec{0}$.

Exercice 2

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}+2\\ \sqrt{3}+2\\ -4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\sqrt{3}+1\\ 3\sqrt{3}+1\\ -2\end{pmatrix}$.

On a d'une part : $\vec{u}.\vec{v} = \left(2-\sqrt{3}\right)\left(1-3\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1+3\sqrt{3}\right)+8 = 30$

et d'autre part $\vec{u}.\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|\cos\alpha = \sqrt{30}.\sqrt{60}\cos\alpha$.

IL en résulte que $\sqrt{30}.\sqrt{60}\cos\alpha = 30 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Or $\alpha\in[0,\pi]$ donc $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3

1) Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\ 1\\ \sqrt{2}+1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}+1\\ 3+2\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

a) $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$.

b) On en déduit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2) Soient les points A(2,0,0) , B(0,4,0) et C(0,0,3).

a) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}12\\6\\8\end{pmatrix}$.

Produit scalaire - Produit vectoriel

On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}12\\6\\8\end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}12\\6\\8\end{pmatrix}$.

b) On en déduit que, étant trois points A, B et C de l'espace : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}$

Exercice 4

1) On donne le point A(-3,5,2) et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$.

a) $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}\wedge\vec{v}\neq\vec{0}$ d'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

b) Soit (P) le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P) donc $P:\ 2x+2y-z+d=0$ où $d\in\mathbb{R}$.

Or A(-3,5,2) $\in$ (P) $\Leftrightarrow -6+10-2+d=0 \Leftrightarrow d=-2$.

Il en résulte que $P:\ 2x+2y-z+-2=0$

2) On a B(3,-1,1) et C(-2,0 ,2) donc $d(B,P)=\dfrac{|6-2-1-2|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{1}{3}$ et $d(C,P)=\dfrac{|4+0-2-2|}{\sqrt{4+4+1}}=0$.

Exercice 5

1. La distance du point A(2,2,1) à la droite Δ passant par B(4,2,0) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est

Donnée par la formule $d(B,\Delta)=\dfrac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

Comme $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}$ et par suite : $d(B,\Delta)=\dfrac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\dfrac{\sqrt{9+0+36}}{\sqrt{4+9+1}}=\sqrt{\dfrac{45}{14}}$.

2. Déterminons d'abord un point B et un vecteurs directeur $\vec{u}$ de la droite (D) :

Prenons $\alpha=0$, nous obtenons B(1,1,0). Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Produit scalaire - Produit vectoriel

Du système, nous obtenons $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$

La distance du point A(2,2,1) à la droite (D) est $d(B,D)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}=\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{8}{3}}$.

Exercice 6

Considérons les points A(1,2,3) , B(4,2,-1) et C(2,-1,2) de l'espace.

1. L'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC est donnée par la formule $\mathcal{A}=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{2}$.

   On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-12\\-1\\-9\end{pmatrix}$.

   Par suite $\mathcal{A}=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{2}=\dfrac{\sqrt{144+1+91}}{2}=\dfrac{\sqrt{236}}{2}=\sqrt{59}$.

2. a) ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D-1=2\\y_D-2=-3\\z_D-3=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=3\\y_D=-1\\z_D=6\end{cases}$.

   Donc D(3,-1,6).

   b) L'aire $\mathcal{A}'$ de ABCD est $\mathcal{A}'=2\mathcal{A}=2\sqrt{59}$.

Exercice 7

1) On a : A(1,1,1) , B(-1,2,-1), C(2,3,5) et D(1,0,-1) donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ est

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}2&1&4\\-1&-1&-3\\-2&3&7\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1&-3\\3&7\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&4\\3&7\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&4\\-1&-3\end{vmatrix}=-2-5-2=-9$$

Il en résulte que les points A, B , C et D ne sont pas coplanaires.

2) $$\det\left(\vec{u},\vec{u},\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}2&1&4\\-1&-1&-3\\1&3&7\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1&-3\\3&7\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&4\\3&7\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}1&4\\-1&-3\end{vmatrix}=-2-5+7=0$$

3) Soient A(1,-2,3), M(x, y, z) , $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ et (Γ) l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que

$\det(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AM})=0$

$$\det\left(\vec{u},\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & x-1 \\ -1 & -1 & y+2 \\ 1 & 3 & z-3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 2\begin{vmatrix} -1 & y+2 \\ 3 & z-3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ 3 & z-3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ -1 & y+2 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow -2x+7y-z+19=0$$

Ainsi l'ensemble (Γ) est le plan d'équation $-2x+7y-z+19=0$.

Exercice 8 :

1) On a les points A(1,1,1) , B(2,0,0) , C(0,3,0) et D(0,0,-2)

donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix}$.

Le volume du tétraèdre ABCD est V= $\dfrac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|}{6}$

or $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-7+2-3=-8$, il en résulte que V= $\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$

2) a) Soit H le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) , la hauteur issue de A du tétraèdre ABCD est donc AH.

On sait que V = $\dfrac{1}{3}AH.\mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est l'aire du triangle BCD.

On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\-4\\6\end{pmatrix}$ d'où $\mathcal{A}=\dfrac{\left\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right\|}{2}=\dfrac{\sqrt{36+16+36}}{2}=\sqrt{22}$

Il en résulte que $\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{3}AH.\sqrt{22}$ d'où $AH=\dfrac{4}{\sqrt{22}}$.

b) Comme $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\-4\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD) alors

$(BCD):-6x-4y+6z+d=0$, où $d\in\mathbb{R}$.

Or B(2,0,0) $\in(BCD)\Leftrightarrow -12+d=0\Leftrightarrow d=12$.

Par suite, $(BCD):-6x-4y+6z+12=0$ ou encore $(BCD):3x+2y-3z-6=0$.

La distance AH est donc la distance du point A au plan (BCD) d'où $AH=\dfrac{|3+2-3-6|}{\sqrt{9+4+9}}=\dfrac{4}{\sqrt{22}}$.