Suites réelles

Exercice n°1 :

Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite définie par $u_1 = 2$ et pour tout entier $n > 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3}$.

1. Représenter sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite (u_n), unité graphique 2 cm. Quel conjecture peut-on faire sur la limite de la suite ?
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n>0}$ définie par $v_n = u_n + 1$ est géométrique, on donnera la raison et le premier terme.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4. On pose $S_n = u_1 + u_2 + + u_n$. Exprimer S_n en fonction de n.
5. Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n>0}$ et $(S_n)_{n>0}$.

Exercice n°2 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n + 1)$

1. Démontrer que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = 2 - u_n$ est une suite géométrique.
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n et trouver la limite de la suite (u_n).

Exercice n°3 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.

La suite (v_n) est définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 3$

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
2. Exprimer v_n en fonction de n, puis en déduire une expression de u_n en fonction de n.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).
4. (S_n) la suite définie pour tout entier n par $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$
   a. Exprimer S_n en fonction de n.
   b. En déduire la limite de la suite (S_n).

Suites réelles

Exercice n°4 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $2u_{n+1} = u_n - 1$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. α est un nombre réel. La suite (v_n) est définie pour tout entier n par $v_n = u_n - \alpha$
   a. Trouver le réel α tel que la suite (v_n) soit une suite géométrique.
   b. Exprimer (v_n) et (u_n) en fonction de n.
   c. Etudier le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Exercice n°5 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{3}$

La suite (v_n) est définie pour tout entier n par $v_n = u_n - \alpha$

1. Trouver le réel α tel que la suite (v_n) soit une suite géométrique.
2. La suite (v_n) est-elle convergente ?
3. Exprimer v_n en fonction de n et calculer $s_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$
4. Exprimer u_n en fonction de n et calculer $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

Exercice n°6 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et pour tout entier positif n, $u_{n+1} = \dfrac{9}{6 - u_n}$.

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
3. Calculer $S = \sum_{k=0}^{k=100} v_k$.

Suites réelles

Exercice n°7 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$

1. Démontrer que pour tout entier n, $u_n > 1$.
2. La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$

   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser sa limite.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite.

Exercice n°8 :

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 3$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n + 1}$

1. Démontrer que pour entier n, $u_n > 0$.
2. La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$

   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser sa limite.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite.

Exercice n°9 :

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

1. Démontrer, par récurrence, que : pour tout n, $0 \leq u_n < 1$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est monotone.
3. La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
4. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n et trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Suites réelles

Exercice n°10 :

La suite (u_n) est définie par : $u_1 = \frac{2}{7}$ et pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - u_n}$

(On admettra que quel que soit $n \geq 1$, $u_n \neq 0$ et $u_n \neq 3$).

1. Calculer u_2 et u_3.
2. La suite (v_n) est définie pour tout $n \geq 1$ par : $v_n = \frac{1}{u_n}$
   a. Calculer v_1.
   b. Démontrer que pour tout $n \geq 1$: $v_{n+1} = 3v_n - 1$
3. La suite (w_n) est définie par : $w_n = v_n - \frac{1}{2}$
   a. Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n et calculer le premier terme w_1.
   b. Quelle est la nature de la suite (w_n) ?
   c. Exprimer w_n en fonction de n.
4. a. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   b. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice n°11 :

On définit la suite (u_n) par : $u_0 = -3$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{u_n - 8}{2u_n - 9}$

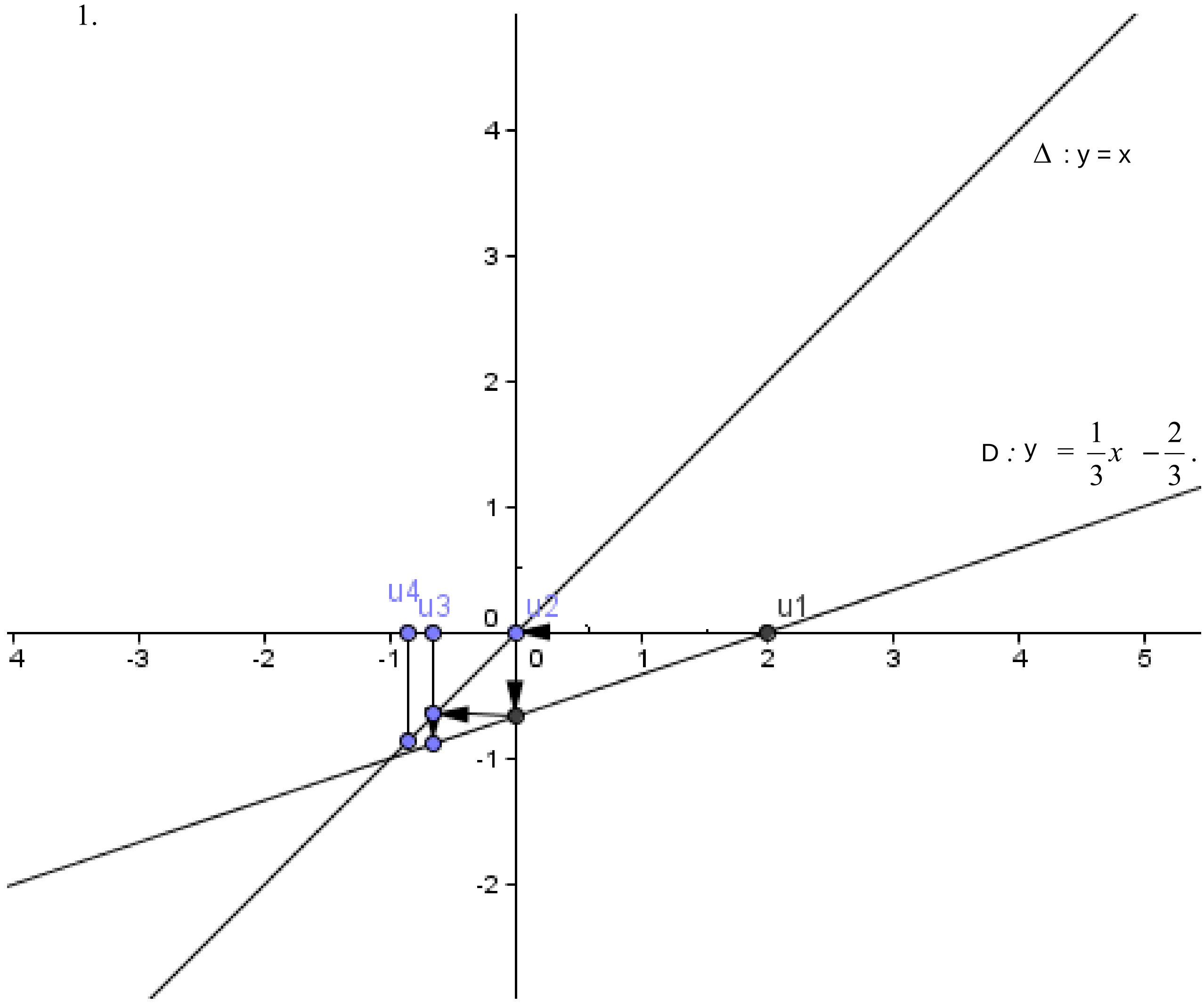
1. Démontrer, par récurrence, que pour tout n, $u_n < 1$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge.
3. La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $v_n = 1 - u_n$

   Démontrer que, pour tout n : $v_{n+1} < \frac{1}{7} v_n$ et en déduire la limite de la suite (v_n).
4. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Suites réelles : corrigé

Exercice n°1 :

1.



$u_1 = 2$ $\qquad$ $u_2 = \frac{1}{3}u_1 - \frac{2}{3} = 0$

$u_3 = \frac{1}{3}u_2 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$. $\qquad$ $u_4 = \frac{1}{3}u_3 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{8}{9}$.

On constate que $\lim_{n \to +\infty} u_n = -1$.

Suites réelles : corrigé

2. Soit n un entier naturel non nul.

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}v_n .$$

La suite $(v_n)_{n>0}$ est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$.

De plus, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = u_n + 1$, en particulier, $v_1 = u_1 + 1 = 3$.

Ainsi, la suite $(v_n)_{n>0}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_1 = 3$.

3. D'après la question précédente, pour tout $n > 0$, $v_n = v_1 q^{n-1} = 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$.

Soit pour tout $n > 0$, $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$.

Comme pour tout $n > 0$, $v_n = u_n + 1$, il vient que pour tout $n > 0$, $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 1$.

4. Soit n un entier naturel non nul.

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = v_1 - 1 + v_2 - 1 + \dots + v_n - 1 = v_1 + v_2 + \dots + v_n - n.$

$v_1 + v_2 + \dots + v_n$ est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison e

et de premier terme $v_1 = 2$, donc $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 3\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = 3\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$.

Donc, pour tout $n > 0$, $S_n = \frac{9}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] - n.$

Suites réelles : corrigé

5. Pour tout $n > 0$, $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 1$. Or $0 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = 0$.

Donc, il vient par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

Pour tout $n > 0$, , $S_n = \frac{9}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] - n$. Comme $0 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{9}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = \frac{9}{2}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty$.

<u>Exercice n°2 :</u>

1. On a $v_{n+1} = 2 - u_{n+1} = 2 - \frac{2}{3}(u_n + 1) = 2 - \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}u_n = \frac{2}{3}(u_n - 2) = \frac{2}{3}v_n$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

2. La suite (v_n) étant une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1$, on a

On a $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n v_0 \Rightarrow u_n = 2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Or $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

Donc la suite (u_n) converge vers 2.

<u>Exercice n°3 :</u>

1. On a $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \frac{2}{3}u_n - 1 + 3 = \frac{2}{3}u_n + 2 = \frac{2}{3}(u_n + 3) = \frac{2}{3}v_n \Rightarrow$ la suite (v_n) est une suite géométrique

de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

2. La suite (v_n) étant une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1$, on a $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n v_0$

Donc, pour tout entier n $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3$.

Suites réelles : corrigé

3. Or $-1<\frac{2}{3}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n-3=-3 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-3$

Donc la suite (u_n) converge vers 3.

4. (S_n) la suite définie pour tout entier n par $S_n=u_0+u_1+....+u_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$

a. On a $S_n = u_0+u_1+ \quad +u_n=\sum_{k=0}^{n}u_k=\sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^k- \quad \right]=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k - \sum_{k=0}^{n}3$

$$=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} -3(n+1) = \left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] -3n-3 = -3n -3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

b. On a $-1<\frac{2}{3}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}-3n-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=-\infty$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=-\infty$

<u>Exercice n°4</u> :

1. On a $u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n-1) \Rightarrow u_1=\frac{1}{2}(u_0-1)=0$; $u_2=\frac{1}{2}(u_1-1)=-\frac{1}{2}$; $u_3=-\frac{3}{4}$ et $u_4=-\frac{7}{8}$.
2. α est un nombre réel. La suite (v_n) est définie pour tout entier n par $v_n=u_n-\alpha$

a. On a $v_{n+1}=u_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{2}-\alpha=\frac{1}{2}(u_n-1-2\alpha)$.

La suite (v_n) est géométrique $\Leftrightarrow -1-2\alpha=-\alpha \Leftrightarrow \alpha=-1$.

Donc, pour tout entier n , on a $v_n=u_n+1$

b. La suite (v_n) étant une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=2$, on a

$v_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ d'où $u_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^n-1$.

c. On a $u_{n+1}-u_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1-2\left(\frac{1}{2}\right)^n+1=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-2\left(\frac{1}{2}\right)^n=2\left(\frac{1}{2}\right)^n(\frac{1}{2}-1)=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

donc la suite (u_n) est décroissante.

Suites réelles : corrigé

Exercice n°5 :

1. On a $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = 2u_n - \frac{1}{3} - \alpha = 2(u_n - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\alpha)$.

   La suite (v_n) est géométrique $\Leftrightarrow -\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\alpha = -\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}$.

   Donc, pour tout entier n , on a $v_n = u_n - \frac{1}{3}$

2. La suite (v_n) étant une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \frac{5}{3}$, on a $v_n = \frac{5}{3} \times 2^n$

   $2 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

3. On a $v_n = \frac{5}{3} \times 2^n \Rightarrow s_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{5}{3} \times 2^k = \frac{5}{3} \sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{5}{3} \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1-2} = -\frac{5}{3} \times (1 - 2^{n+1})$

4. On a $u_n = v_n + \frac{1}{3} \Rightarrow u_n = \frac{5}{3} \times 2^n + \frac{1}{3}$

   $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} v_k + \frac{1}{3}(n+1) = -\frac{5}{3} \times 1 + \frac{5}{3} \times 2^{n+1} - \frac{1}{3} n - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \times 2^{n+1} - \frac{1}{3} n - 2$

Exercice n°6 :

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$,

   $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{9}{6-u_n} - 3} - \frac{1}{u_n} = \frac{6 - u_n}{9 - 3u_n} - \frac{1}{u_n - 3}$$
   $$= \frac{6 - u_n}{3(u_n - 3)} - \frac{3}{3(u_n - 3)} = \frac{6 - u_n - 3}{3(u_n - 3)} = \frac{3 - u_n}{3(u_n - 3)} = -\frac{1}{3}$$

   (v_n) est arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

2. Soit n un entier naturel, $v_n = v_0 + \left(-\frac{1}{3}\right) n = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} n = \frac{-3 - 4n}{12}$

   On a $v_n = \frac{1}{u_n - 3} \Leftrightarrow u_n v_n - 3v_n = 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{1 + 3v_n}{v_n} = \frac{1}{v_n} + 3$ (par définition $v_n \neq 0$)

   D'où $u_n = \frac{-12}{3+4n} + 3 = \frac{-12 + 9 + 12n}{3 + 4n} = \frac{-3 + 12n}{3 + 4n}$.

   Pour tout n, $u_n = \frac{-3 + 12n}{3 + 4n}$.

3. Pour tout $n > 0$,

   $$\sum_{k=0}^{n} v_n = \frac{n+1}{2} \times (v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2} \times \left(-\frac{1}{4} + \frac{-3 - 4n}{12}\right) = \frac{n+1}{2} \times \left(\frac{-3 - 3 - 4n}{12}\right) = \frac{(n+1)(-3-2n)}{12}$$

   D'où $\sum_{k=0}^{100} v_n = \frac{(100+1)(-3-200)}{12} = -\frac{20503}{12}$

Suites réelles : corrigé

Exercice n°7 :

1. On a $u_0 = 3 > 1$

   On suppose que $u_n > 1$ et on montre que $u_{n+1} > 1$

   On a $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$. Or on a $4u_n - 2 - (u_n + 1) = 3u_n - 1$. Or on suppose que $u_n > 1 \Leftrightarrow 3u_n - 1 > 0$

   $\Leftrightarrow 4u_n - 2 - (u_n + 1) > 0 \Leftrightarrow 4u_n - 2 > (u_n + 1) \Leftrightarrow u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1} > 1$

   Donc, pour tout entier n , on a $u_n > 1$

2. On a : $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{\dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 2}{\dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 1} = \dfrac{4u_n - 2 - 2(u_n + 1)}{4u_n - 2 - (u_n + 1)} = \dfrac{2u_n - 4}{3u_n - 3} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1} = \dfrac{2}{3} v_n$

la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{5}{2}$, on a $v_n = \dfrac{5}{2} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Or $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5}{2} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

Donc la suite (v_n) converge vers 0.

3. On a $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1} \Leftrightarrow v_n(u_n - 1) = u_n - 2 \Leftrightarrow v_n u_n - v_n - u_n = -2$

   $\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = v_n - 2 \Leftrightarrow u_n = \dfrac{v_n - 2}{v_n - 1}$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2 \Rightarrow$ la suite (u_n) est convergente et sa limite est 2.

Exercice n°8 :

1. On a $u_0 = 3 > 0$

   On suppose que $u_n > 0$ et on montre que $u_{n+1} > 0$

   On a $u_{n+1} = \dfrac{2}{u \; + 1}$. Or on suppose que $u_n > 0 \Rightarrow u_n + 1 > 0 \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n + 1} > \mathbf{0}$

   Donc, pour tout entier n , on a $u_n > 0$

Suites réelles : corrigé

2. On a : $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}=\dfrac{\dfrac{2}{u_n+1}-1}{\dfrac{2}{u_n+1}+2}=\dfrac{2-(u_n+1)}{2+2(u_n+1)}=\dfrac{-u_n+1}{2u_n+4}=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u_n-1}{u_n+2}=-\dfrac{1}{2}v_n$

la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=\dfrac{2}{5}$,

donc pour tout entier naturel n, on a : $v_n=\dfrac{2}{5}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Or $-1<-\dfrac{1}{2}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{5}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$

Donc la suite (v_n) converge vers 0.

3. On a $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2} \Leftrightarrow v_n(u_n+2)=u_n-1 \Leftrightarrow v_nu_n+2v_n-u_n=-1$

$\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=2v_n-1 \Rightarrow u_n=\dfrac{2v_n-1}{v_n-1}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$ donc la suite (u_n) est convergente et sa limite est 1.

Exercice n°9 :

1. On a $u_0=0$ donc $0\leq u_0<1$

On suppose que $0\leq u_n<1$ et on montre que $0\leq u_{n+1}<1$

On a $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}$.

Or $u_n>0 \Rightarrow 2u_n+1>0$ et $u_n+2>0 \Rightarrow u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}>\mathbf{0}$

D'autre part $u_n<1$, $2u_n+1-(u_n+2)=u_n-1<0 \Rightarrow 2u_n+1<(u_n+2) \Rightarrow u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}<1$

Donc, pour tout entier n ,on a $0\leq u_n<1$

2. On a $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-u_n=\dfrac{2u_n+1-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\dfrac{-u_n^2+1}{u_n+2}=\dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$

or pour tout entier n , on a $0\leq u_n<1$

donc $u_{n+1} - u_n > 0$ d'où la suite (u_n) est monotone.

3. On a : $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \dfrac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-1}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}+2} = \dfrac{2u_n+1-(u_n+2)}{2u_n+1+(u_n+2)} = \dfrac{u_n-1}{3u_n+3} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{u_n-1}{u_n+1} = \dfrac{1}{3}v_n$

la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -1$, on a $v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Or $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

Donc la suite (v_n) converge vers 0.

4. On a $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{v_n+1}{1-v_n} = \dfrac{-\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}{1+-\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 \Rightarrow$ la suite (u_n) est convergente et sa limite est 1.

Exercice n°10 :

1. On a $u_2 = \dfrac{2}{19}$ et $u_3 = \dfrac{2}{55}$

2. a. On a $v_1 = \dfrac{1}{u_1} = \dfrac{7}{2}$

   b. On a $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{\dfrac{u_n}{3-u_n}} = \dfrac{3-u_n}{u_n} = \dfrac{3}{u_n} - 1 = 3v_n - 1 \Rightarrow$ pour tout $n \geq 1$, on a : $v_{n+1} = 3v_n - 1$

3. On a $w_{n+1} = v_{n+1} - \dfrac{1}{2} = 3v_n - 1 - \dfrac{1}{2} = 3v_n - \dfrac{3}{2} = 3(v_n - \dfrac{1}{2}) = 3w_n$

   Donc, la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $w_1 = 3$.

   Ainsi, on a $w_n = 3\times 3^n = 3^{n+1}$

4. a. On a $w_n = 3^{n+1}$ et $w_n = v_n - \dfrac{1}{2} \Rightarrow v_n = w_n + \dfrac{1}{2} = 3^{n+1} + \dfrac{1}{2}$

   Or, $v_n = \dfrac{1}{u_n} \Rightarrow u_n = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{3^{n+1}+\dfrac{1}{2}}$

b. On a $3 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(3)^{n+1} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 3^{n+1} + \dfrac{1}{2} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{3^{n+1}+\dfrac{1}{2}} = 0$

Donc, la suite (u_n) est-elle convergente et sa limite est 0.

Suites réelles : corrigé

Exercice n°11 :

1. On a $u_0 = -3 < 1$

On suppose $u_n < 1$ et on montre que $u_{n+1} < 1$

On a $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 8}{2u_n - 9} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u_n - 8}{u_n - \frac{9}{2}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u_n - \frac{9}{2} - \frac{7}{2}}{u_n - \frac{9}{2}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{-\frac{7}{2}}{u_n - \frac{9}{2}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{7}{9 - 2u_n}$

Or $u_n < 1 \Leftrightarrow 9 - 2u_n > 7 \Leftrightarrow \dfrac{7}{9 - 2u_n} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{7}{9 - 2u_n} < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < 1$

Donc, pour tout $n \in IN$, on a $u_n < 1$

2. On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n - 8}{2u_n - 9} - u_n = \dfrac{u_n - 8 - u_n(2u_n - 9)}{2u_n - 9} = \dfrac{-2u_n^2 + 10u_n - 8}{2u_n - 9}$

On étudie le signe du numérateur et du dénominatueur.

L'étude de $-2x^2 + 10x - 8$ sur $]-\infty ; 1[$ montre que le trinôme est négatif. (calcul de Δ)

On a $2u_n - 9 < 0$ donc, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-2u_n^2 + 10u_n - 8}{2u_n - 9} > 0$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

Par conséquent, La suite étant croissante et majorée par 1, elle converge.

3. On a $v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - \dfrac{u_n - 8}{2u_n - 9} = \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 9} = \dfrac{v_n}{9 - 2u_n}$. Or $9 - 2u_n > 7 \Rightarrow \dfrac{1}{9 - 2u_n} < 7$

Donc, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{9 - 2u_n} < \dfrac{1}{7} v_n$ et $v_n > 0$.

Par récurrence, on montre facilement que $v_n < \left(\dfrac{1}{7}\right)^n v_0 = 4 \times \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$.

Or $-1 < \dfrac{1}{7} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{7}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

4. Pour tout n de IN, on a $v_n = 1 - u_n \Rightarrow u_n = 1 - v_n \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 - v_n = 1$

Donc, la limite de la suite (u_n) est 1.