Nombres complexes

Exercice 1

1) Ecrire sous forme algébrique et trigonométrique les nombres suivants : i^0, i^1, i^2, i^3 et i^4

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = i^0 + i^1 + i^2 + \dots + i^n$.

Calculer $S_n - i\,S_n$, puis en déduire S_n .

b) Déterminer la forme algébrique de S_n , pour $n = 2 + 4k$ ($k \in \mathbb{N}$)

Exercice 2

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants:

$$z_1 = (2-7i)^2 \ , \ z_2 = \frac{1-i}{2+3i} \ , \quad z_3 = \frac{1}{i} + \frac{i}{1-i} \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$$

Exercice 3

Pour tout nombre complexe z, on pose : $z' = z\,\overline{z} + 2z + i\,\overline{z}$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

1) Calculer z' pour

a) $z = 1 + i$. b) $z = 2 - i$. c) $z = -2 - i$.

2) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.

Exprimer en fonction de x et de y la partie réelle et la partie imaginaire de z'.

3) Déterminer l'ensemble E des nombres complexes z tel que $z' = 0$

4) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) . On appelle M le point d'affixe z.

a) Déterminer l'ensemble F des point M tels que z' soit réel.

b) Déterminer l'ensemble G des points M tels que z' soit imaginaire pur .

c) Quels sont les points communs à F et G ?

Nombres complexes

Exercice 4

A tout nombre complexe $z = x + iy$ différent de -3, on associe $Z = \dfrac{z-2i}{z+3}$

1. Si $z = 2 - 3i$, Déterminer Z .
2. Résoudre l'équation $\dfrac{z-2i}{z+3} = 2 - i$
3. On pose z = x + i y avec x et y sont réels.

Déterminer la partie réelle X et la partie imaginaire Y de Z en fonction de x et y.

4. Soit M l'image de z dans le plan complexe.

Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tel que:

a) Z est réel.

b) Z est imaginaire pur.

Exercice 5

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique :1cm, on note A ; B ; C les points d'affixes respectives $z_A = 1 + i$, $z_B = 3 - i$ et $z_C = 4 + 2i$

Déterminer la nature du triangle ABC.

Exercice 6

Le plan est rapporté à n repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On considère les points A et C d'affixes respectives $z_A = 4$ et $z_C = -2\sqrt{3} - 2i$

et les points B et D d'affixes respectives $z_B = iz_A$ et $z_D = iz_C$.

1. a) Calculer les modules des nombres complexes z_A et z_C.

   b) En déduire les modules des nombres complexes z_B et z_D.

   c) Montrer que les points A, B , C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2. a) Montrer que les doites (AD) et (BC) sont parallèles.

   b) Montrer que les diagonales du quadrilatère ABCD sont perpendiculaires.

Nombres complexes

Exercice 7

Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = -1 + i$, $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$, $z_3 = -4i$ et $z_4 = -9$

Exercice 8

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, on donne $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{4}$, $z_2 = z_1 - i$ et $z_3 = \bar{z}_1 - 1$

On note M_1, M_2, M_3 les images respectives de z_1, z_2, z_3 dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unit e graphique 4 cm.

1. a) Déterminer la forme algébrique de z_2 et z_3.
   b) Placer les points M_1, M_2, M_3 dans le plan muni du repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.
   c) Calculer $|z_3 - z_1|$ et $|z_3 - z_2|$.
   Que peut-on en déduire quant à la nature du triangle $M_1M_2M_3$?
2. a) Déterminer module et argument de z_1 et z_2.
   b) Montrer que le triangle M_1OM_2 est rectangle.

Nombres complexes : corrigé

Exercice 1

1) $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ et $i^4 = 1$.

2) a) On obtient $S_n - i\,S_n = 1 - i^{n+1}$

puis $(1 - i)\,S_n = 1 - i^{n+1} \Leftrightarrow S_n = \dfrac{1 - i^{n+1}}{1 - i}$

b) Si $n = 2 + 4k$ avec $k \in \mathbb{N}$:

$$i^{n+1} = i^{2+4k+1} = i^{3+4k} = i^3\, i^{4k} = -i \times (i^4)^k = -i \times 1 = -i$$

Donc $S_n = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{2} = \dfrac{2i}{2} = i$

Exercice 2

$(2-7i)^2 = -45 - 28i$ $\qquad$ $\dfrac{1-i}{2+3i} = -\dfrac{1}{13} - \dfrac{5}{13}i$

$\dfrac{1}{i} + \dfrac{i}{1-i} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ $\qquad$ $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} = i$

Exercice 3

1) **a)** *Si* $z = 1 + i$ alors $z' = 5 + 3i$

b) *Si* $z = 2 - i$ alors $z' = 8$

c) *Si* $z = -2 - i$ alors $z' = -4i$

2) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y , x' et y' sont des réels.

$z' = z\bar{z} + 2z + i\bar{z} \Leftrightarrow x' + iy' = x^2 + y^2 + 2(x + iy) + i(x - iy)$

$\Leftrightarrow x' + iy' = x^2 + y^2 + 2x + y + i(x + 2y)$

D'où : $x' = x^2 + y^2 + 2x + y$ et $y' = 2y + x$

Nombres complexes : corrigé

3) $z' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2 - 3y = 0 \\ x = -2y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y(5y - 3) = 0 \\ x = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } y = \frac{3}{5} \\ x = -2y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -\frac{6}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$

Donc $E = \left\{ 0 , -\frac{6}{5} + \frac{3}{5} i \right\}$

4) a) $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2y + x = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} x$

Par suite, (F) est la droite d'équation $y = -\frac{1}{2} x$

b) Déterminer l'ensemble Φ des points M tels que z' soit imaginaire pur (0 compris).

$z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + y = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 - 1 - \frac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$

(G) est donc le cercle de centre I (-1 ; $-\frac{1}{2}$) et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$

c) $M(z) \in F \cap G \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R}$ et $z' \in i\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow z' = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z = -\frac{6}{5} + \frac{3}{5} i$

Donc $F \cap G = \left\{ O , A\left(-\frac{6}{5} + \frac{3}{5} i \right) \right\}$

Nombres complexes : corrigé

Exercice 4

1. $z = 2 - 3i \Rightarrow Z = \dfrac{2-3i-2i}{2-3i+3} = \dfrac{2-5i}{5-3i} = \dfrac{25}{34} - \dfrac{19}{34}i$

2. $\dfrac{z-2i}{z+3} = 2 - i \Rightarrow z - 2i = (z+3)(2-i)$

D'où $z - 2i = (2-i)z + 6 - 3i$ puis $z - (2-i)z = 6 - 3i + 2i$

On a donc $(-1+i)z = 6 - i$ d'où $z = \dfrac{6-i}{-1+i} = -\dfrac{7}{2} - \dfrac{5}{2}i$

$S = \left\{-\dfrac{7}{2} - \dfrac{5}{2}i\right\}$

3. $Z = \dfrac{z-2i}{z+3} = \dfrac{x+iy-2i}{x+iy+3} = \dfrac{x+i(y-2)}{(x+3)+iy} = \dfrac{[x+i(y-2)][(x+3)-iy]}{(x+3)^2+y^2}$

$= \dfrac{x(x+3)+y(y-2)+i[(x+3)(y-2)-xy]}{(x+3)^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2+3x-2y+i(-2x+3y-6)}{(x+3)^2+y^2}$

$= \dfrac{x^2+y^2+3x-2y}{(x+3)^2+y^2} + i\dfrac{-2x+3y-6}{(x+3)^2+y^2}$

On a donc $X = \dfrac{x^2+y^2+3x-2y}{(x+3)^2+y^2}$ et $Y = \dfrac{-2x+3y-6}{(x+3)^2+y^2}$

4. a) $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Y = 0 \Leftrightarrow -2x + 3y - 6 = 0$

Donc l'ensemble des points M(z) tels que Z est réel est la droite d'équation -2x + 3 y - 6 = 0 privée du point A(-3, 0).

b) $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow X = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3x - 2y = 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{13}{4}$

Donc l'ensemble des points M(z) tels que Z est imaginaire pur est le cercle de centre

$\Omega\left(-\dfrac{3}{2}; 1\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}\sqrt{13}$

Nombres complexes : corrigé

4) a) $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2y + x = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x$

Par suite, (F) est la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x$

b) Déterminer l'ensemble Φ des points M tels que z' soit imaginaire pur .

z' est imaginaire pur $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + y = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 - 1 - \frac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$

(G) est donc le cercle de centre I (-1 ; $-\frac{1}{2}$) et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$

c) M(z) ∈ F ∩ G $\Leftrightarrow$ $z' \in \mathbb{R}$ et $z' \in i\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ $z' = 0$

$\Leftrightarrow$ z = 0 ou $z = -\frac{6}{5} + \frac{3}{5}i$

Donc F ∩ G = $\left\{ O \, , \, A\left(-\frac{6}{5} + \frac{3}{5}i\right) \right\}$

Exercice 5

$AB = |z_B - z_A| = |2 - 2i| = \sqrt{8}$, $BC = |z_C - z_B| = |1 + 3i| = \sqrt{10}$

et $AC = |z_C - z_A| = |3 + i| = \sqrt{10}$

Le triangle ABC est donc isocèle de sommet principal C.

Remarquons que le triangle ABC n'est pas restangle car $AB^2 \neq BC^2 + AC^2$.

Nombres complexes : corrigé

Exercice 6

1. a) $|z_A| = |4| = 4$ et $|z_C| = \left|-2\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = 4$

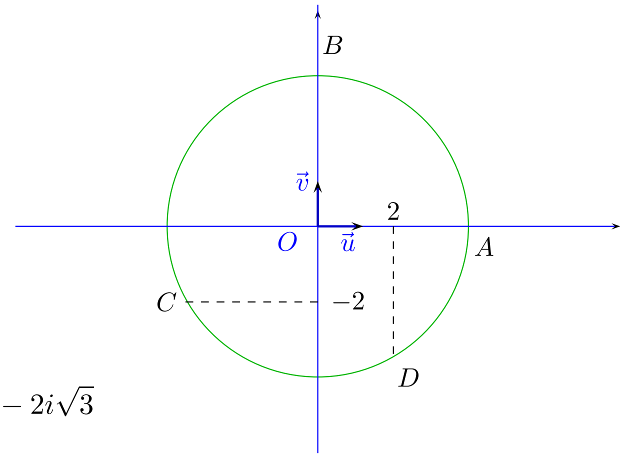
b) $|z_B| = |iz_A| = |i|\,|z_A| = 1 \times 4 = 4$ et $|z_D| = |iz_C| = |i|\,|z_C| = 1 \times 4 = 4$

c) OA = OB = OC = OD = 4

donc les points A, B , C et D

sont sur le cercle de centre O

et de rayon 4.



2. a) On a $z_D - z_A = 2 - 2i\sqrt{3} - 4 = -2 - 2i\sqrt{3}$

et $z_C - z_B = -2\sqrt{3} - 2i - 4i = -2\sqrt{3} - 6i$

Donc $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -2 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ -6 \end{pmatrix}$

d'où $\overrightarrow{BC} = \sqrt{3}\overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires.

Par suite , les doites (AD) et (BC) sont parallèles.

b) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} - 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 2 \\ -2\sqrt{3} - 4 \end{pmatrix}$

d'où $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 2\left(-2\sqrt{3} - 4\right) - 2\left(-2\sqrt{3} - 4\right) = 0$

Par suite , les diagonales du quadrilatère ABCD sont perpendiculaires.

Exercice 7

$z_1 = -1 + i = \left[\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$

$z_2 = -1 - i\sqrt{3} = \left[2; \frac{4\pi}{3}\right]$

$z_3 = -4i = \left[4; -\frac{\pi}{2}\right]$

$z_4 = -9 = [9; \pi]$

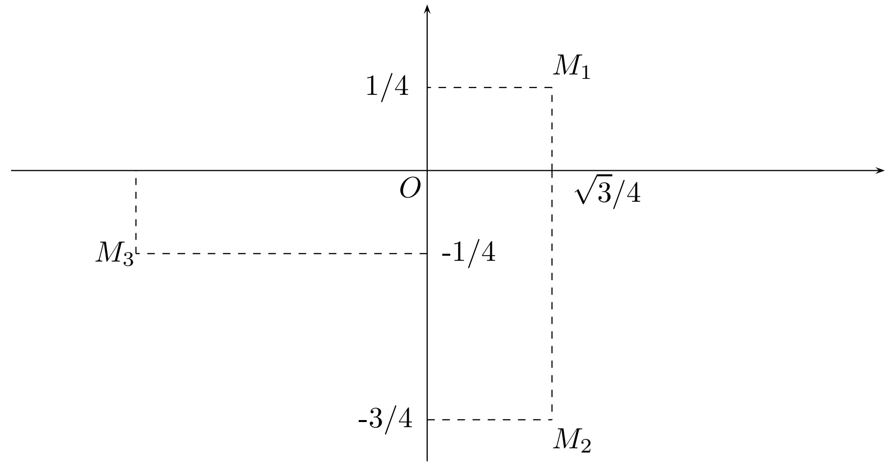
Nombres complexes : corrigé

Exercice 8

1. a) $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{4} - i = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{i}{4} - i = \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{3}{4}i$

$z_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{i}{4} - 1 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4} - 1\right) - \dfrac{1}{4}i$

b)



c) $|z_3 - z_1| = \left|\dfrac{\sqrt{3}}{4} - 1 - \dfrac{1}{4}i - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}i\right)\right| = \left|-1 - \dfrac{1}{2}i\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$

$|z_3 - z_2| = \left|\dfrac{\sqrt{3}}{4} - 1 - \dfrac{1}{4}i - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{3}{4}i\right)\right| = \left|-1 + \dfrac{1}{2}i\right| = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$

On a $|z_3 - z_1| = M_1M_3$ et $|z_3 - z_2| = M_2M_3$

On en déduit $M_1M_3 = M_2M_3 = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$ et donc le triangle $M_1M_2M_3$ est isocèle de sommet principal M_3

2. a) $|z_1| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4}{16}} = \dfrac{1}{2}$

Si on note θ_1 un argument de z_1 alors:

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}/4}{1/2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{1/4}{1/2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Nombres complexes : corrigé

$$|z_2| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et si on note θ_2 un argument de z_2 alors:

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}/4}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{-3/4}{\sqrt{3}/2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

b) On peut procéder de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\overrightarrow{OM_2},\overrightarrow{OM_1}}\right) &= \left(\widehat{\overrightarrow{OM_2},\vec{u}}\right) + \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM_1}}\right) + 2k\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ &= -\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM_2}}\right) + \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM_1}}\right) + 2k\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ &= -\arg(z_2) + \arg(z_1) + 2k\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On a donc $\left(\widehat{\overrightarrow{OM_2},\overrightarrow{OM_1}}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donc le traingle M_1OM_2 est rectangle en O.