



Angles orientés

Dans cette série d'exercices , k désigne un entier relatif .

Exercice 1

ABC est un triangle rectangle et isocèle en B et direct

K est le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et du côté [BC]

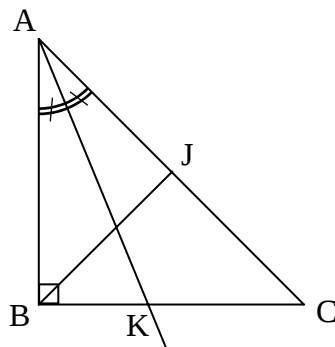
1. Déterminer la mesure principale en radians de :

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}), (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AK}) \text{ et } (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{KA})$$

2. Soit J le milieu du segment [AC]

$$\text{Démontrer que } (\widehat{BJ, KA}) \equiv (\widehat{KA, CB}) \quad [2\pi]$$

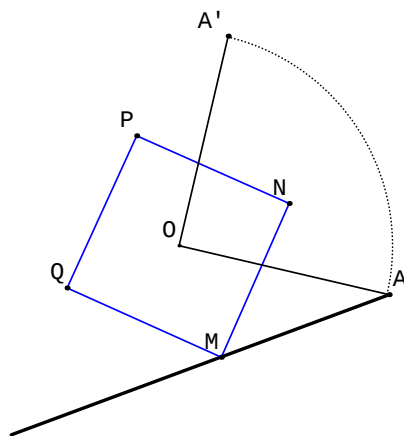
3. Soit I le centre du cercle inscrit dans ABC . Quelle est la nature du triangle BIK ?



Exercice 2

Soit [Ax) une demi-droite d'origine A et O un point n'appartenant pas à cette demi-droite

Pour tout point M de [Ax), on considère le carré direct MNPQ de centre O



1. Soit A' l'image de A par le quart de tour direct de centre O.
 - a. Démontrer, en utilisant la relation de Chasles que, pour tout point M distinct de A,

$$\text{on a : } (\widehat{AM, A'N}) = (\widehat{AO, A'O}) + 2k\pi$$

- b. En déduire que $(\widehat{AM, A'N}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pour tout point de]Ax)
- c. Déterminer le lieu des points N lorsque M décrit la demi-droite]Ax)

2. Déterminer les lieux des points P et Q

Angles orientés

Exercice 3

On considère la ligne brisée ABCDE telle que : $AB = 3$, $BC = 2$ et $(\widehat{BA;BC}) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

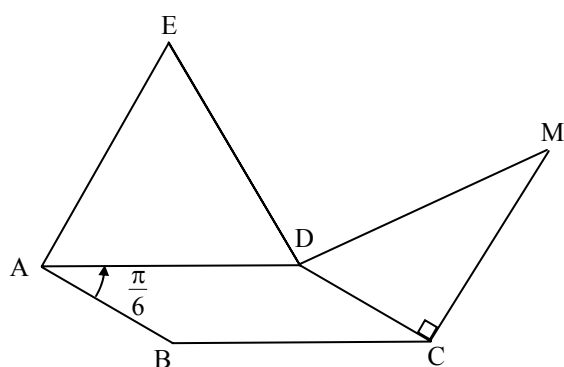
$CD = 3$ et $(\widehat{BC;CD}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $DE = 2$ et $(\widehat{BA;DE}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

a. Construire cette ligne brisée.

b. Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DE})$.

Exercice 4

Soit la figure ci-dessous :



• ABCD est un parallélogramme tel que :

$$(\widehat{AB;AD}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

• ADE est un triangle équilatéral direct

• CMD est un Triangle rectangle tel que :

$$(\widehat{CM;CD}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

1. Montrer que $(\widehat{CD;AE}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

2. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{AE})$ Quelle conclusion peut-on en tirer ?

Exercice 5

Résoudre, dans $]-\pi; \pi]$, les équations

a. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

b. $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 6

Pour chacune des inéquations suivantes, on demande :

- de placer sur le cercle trigonométrique les points correspondants à ces solutions
- de donner la mesure principale associée à chacun des points représentés
- de donner toutes les solutions dans $]-\pi; \pi]$

a. $\sin x \leq -\frac{1}{2}$;

b. $\cos x < \frac{1}{2}$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

(On pourra poser $X = \cos x$)



Angles orientés

Exercice 8

- a. Exprimer $E(x)$ et $F(x)$ en fonction de $\cos x$ et (ou) $\sin x$

$$E(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(x - \pi) + \sin(\pi + x)$$

$$F(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) + \sin(x + 19\pi)$$

- b. Simplifier l'expression $G = \cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{7\pi}{8} + \cos \frac{11\pi}{8}$

Exercice 9

On considère le triangle ABC, rectangle en C tel que $(\widehat{AB; AC}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $AB = 8$ cm

- a. Construire le triangle ABC

- b. Déterminer et dessiner l'ensemble E des points M qui vérifient : $(\widehat{MA; MB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

- c. Déterminer et dessiner l'ensemble H des points M qui vérifient : $(\widehat{MB; BA}) = -\frac{\pi}{6} + k\pi$

Exercice 10

1. Résoudre, dans $]-\pi ; \pi]$, l'équation $\sin 2x = \sin x$

2. Résoudre, dans $]-\pi ; \pi]$, l'équation $\sin 2x = \cos x$

Exercice 11

1. On considère la fonction g définie sur $[0 ; \pi]$ par $g(x) = 2 \cos x + 1$

Dresser le tableau de signe de $g(x)$

2. On considère la fonction f définie sur $[0 ; \pi]$ par $f(x) = 2 \cos^2 x - \cos x - 1$

- a. Factoriser le trinôme $2X^2 - X - 1$, En déduire une factorisation de $f(x)$

- b. Déterminer le signe de $f(x)$



Angles orientés

Exercice 12

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

On considère les points : $A(4;0)$ et $B(-2\sqrt{2};2\sqrt{2})$

1. Faire un graphique que l'on complètera au cours de l'exercice
2. Déterminer les coordonnées polaires du point B .
Que peut-on en déduire pour le triangle BOA ?
3. Calculer les coordonnées cartésiennes du point I milieu du segment [AB]
4. Calculer la longueur OI et une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OI})$. En déduire les coordonnées polaires du point I.
5. Déduire des question 3 et 4 que :

$$\cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{On admettra que } \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \quad \text{et que } \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$$

6. a. Calculer $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$
b. Déterminer les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{8}$



Angles orientés: corrigé

Exercice 1

$$1. \quad (\widehat{BC, CA}) \equiv (\widehat{CB, CA}) + \pi \quad (2\pi)$$

$$\equiv -\frac{\pi}{4} + \pi \quad (2\pi)$$

$$\equiv \frac{3\pi}{4} \quad (2\pi)$$

$$(\widehat{AB, AK}) \equiv \frac{1}{2}(\widehat{AB, AC}) \quad (2\pi)$$

$$\equiv \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$$

$$\equiv \frac{\pi}{8} \quad (2\pi)$$

$$(\widehat{BC, KA}) \equiv (\widehat{BC, BA}) + (\widehat{BA, KA}) \quad (2\pi)$$

$$\equiv (\widehat{BC, BA}) + (\widehat{AB, AK}) \quad (2\pi)$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (2\pi)$$

$$\equiv \frac{5\pi}{8} \quad (2\pi)$$

$$2. \quad (\widehat{BJ, KA}) \equiv (\widehat{BJ, BC}) + (\widehat{BC, KA}) \quad (2\pi) \quad \text{et} \quad (\widehat{KA, CB}) \equiv (\widehat{KA, BC}) + \pi \quad (2\pi)$$

$$\equiv \frac{1}{2}(\widehat{BA, BC}) + (\widehat{BC, KA}) \quad (2\pi)$$

$$\equiv -\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{8} \quad (2\pi)$$

$$\equiv \frac{3\pi}{8} \quad (2\pi)$$

$$\equiv -(\widehat{BC, KA}) + \pi \quad (2\pi)$$

$$\equiv -\frac{5\pi}{8} + \pi \quad (2\pi)$$

$$\equiv \frac{3\pi}{8} \quad (2\pi)$$

$$\text{Donc } (\widehat{BJ, KA}) \equiv (\widehat{KA, CB}) \quad (2\pi)$$

3. I qui est le centre du cercle inscrit dans ABC, est le point d'intersection des bissectrices [AK)

$$\text{et [BJ) donc } (\widehat{BJ, KA}) \equiv (\widehat{BI, KI}) \quad (2\pi) \quad \text{donc} \quad (\widehat{BJ, KA}) \equiv (\widehat{IB, IK}) \quad (2\pi)$$

$$\text{et} \quad (\widehat{KA, CB}) \equiv (\widehat{KI, KB}) \quad (2\pi)$$

$$\text{La question 2 nous permet d'affirmer que } (\widehat{IB, IK}) \equiv (\widehat{KI, KB}) \quad (2\pi)$$

Par conséquent, le triangle BIK est isocèle B



Angles orientés: corrigé

Exercice 2

$$1.a. (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'N}}) = (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO}}) + (\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{A'O}}) + (\widehat{\overrightarrow{A'O}, \overrightarrow{A'N}}) \quad (2\pi)$$

Or dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ les points O, A et M ont pour images respectives O, A' et N donc l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO})$ a pour image l'angle $(\overrightarrow{A'N}, \overrightarrow{A'O})$ et comme les rotations conservent

les angles orientés, on a $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'N}, \overrightarrow{A'O}}) = -(\widehat{\overrightarrow{A'O}, \overrightarrow{A'N}}) \quad (2\pi)$

$$\text{Par conséquent } (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'N}}) = (\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{A'O}}) \quad (2\pi)$$

$$1.b. (\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{A'O}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \text{ car } A' \text{ est l'image de } A \text{ par la rotation de centre } O \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2} \\ \text{Par conséquent } (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'N}}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

Remarque :

On pouvait obtenir ce résultat beaucoup plus rapidement en utilisant une propriété des rotations :

Dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ les points A et M ont pour images respectives A' et N

donc le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour image le vecteur $\overrightarrow{A'N}$ donc $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'N}}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$

1.c. On en déduit que les points N se trouvent sur la demi-droite $]A'x')$ image de $]Ax)$ dans la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

2. En considérant le point A₁, image de A dans la symétrie de centre O, on a :

$$\overrightarrow{A_1P} = \overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} \text{ donc } (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A_1P}}) = \pi \quad (2\pi)$$

On en déduit que les points P se trouvent sur la demi-droite $]A_1x_1)$ image de $]Ax)$ dans la symétrie de centre O

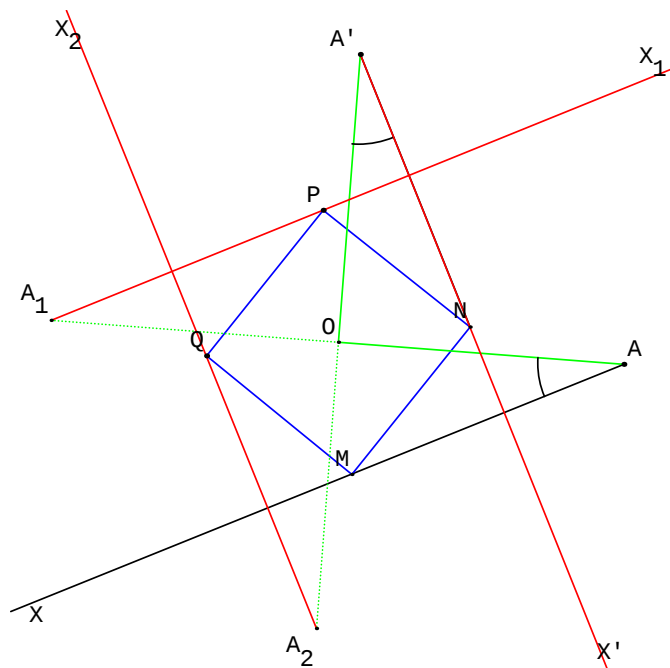
En considérant le point A₂, image de A dans la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, on prouverait

$$\text{comme dans la question 1 que } (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A_2Q}}) = (\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{A_2O}}) \quad (2\pi)$$

$$\text{par suite } (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A_2Q}}) = -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

On en déduit que les points Q se trouvent sur la demi-droite $]A_2x_2)$ image de $]Ax)$ dans la de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

Angles orientés: corrigé



Exercice 3

Dans tout l'exercice k désigne un entier relatif.

a. On a $(\widehat{CB;CD}) = (\widehat{CB;CD}) + \pi + 2k\pi$

$$= -\frac{\pi}{4} + \pi + 2k\pi$$

$$= \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

b. En utilisant la relation de Chasles on peut écrire

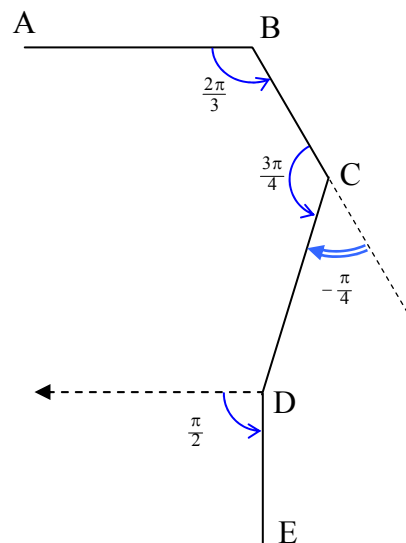
$$(\widehat{BA;DE}) = (\widehat{BA;BC}) + (\widehat{BC;DC}) + (\widehat{DC;DE}) + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow (\widehat{BA;DE}) = (\widehat{BA;BC}) + (\widehat{CB;CD}) + (\widehat{DC;DE}) + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} + (\widehat{DC;DE}) + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow (\widehat{DC;DE}) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} - \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow (\widehat{DC;DE}) = -\frac{11\pi}{12} + 2k\pi$$



Angles orientés: corrigé

Exercice 4

$$1. (\widehat{CD;AE}) = (\widehat{BA;AE}) + 2k\pi \quad \text{car } ABCD \text{ est un parallélogramme}$$

$$(\widehat{CD;AE}) = (\widehat{BA;AB}) + (\widehat{AB;AD}) + (\widehat{AD;AE}) + 2k\pi$$

$$= -\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$= -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$2. (\widehat{CM;AE}) = (\widehat{CM;CD}) + (\widehat{CD;AE}) + 2k\pi$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$= 2k\pi$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et de même sens et les droites (CM) et (AE) sont parallèles

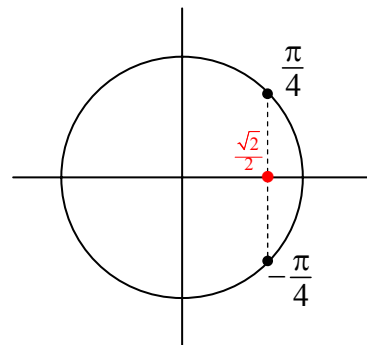
Exercice 5

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{Dans }]-\pi; \pi], S = \left\{ -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\}$$



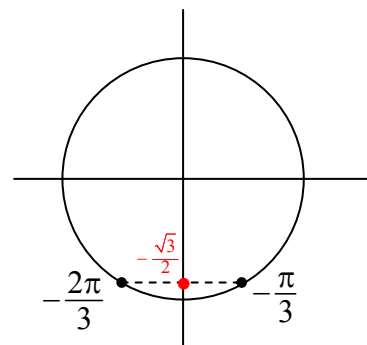
$$\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$\text{Dans }]-\pi; \pi], S = \left\{ -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$$





Angles orientés: corrigé

Exercice 6

$$\sin x \leq -\frac{1}{2}$$

Graphiquement on obtient : $-\frac{5\pi}{6} \leq x \leq -\frac{\pi}{6}$

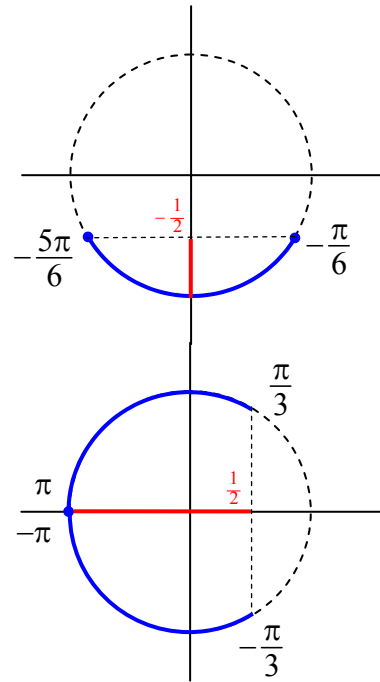
$$S = \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right]$$

$$\cos x < \frac{1}{2}$$

Graphiquement on obtient :

$$-\pi < x < -\frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{3} < x \leq \pi$$

$$S = \left]-\pi; -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$$



Exercice 7

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

En posant $X = \cos x$ on obtient

$$2X^2 + X - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 \quad \text{d'où} \quad \sqrt{\Delta} = 3$$

Il a donc deux racines: $X = \frac{-1-3}{4}$

ou

$$X = \frac{-1+3}{4}$$

$\Leftrightarrow$

$$X = -1$$

ou

$$X = \frac{1}{2}$$

D'où

$$\cos x = -1$$

ou

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow$

$$x = \pi + 2k\pi$$

ou

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Exercice 8

$$E(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(x - \pi) + \sin(\pi + x) = \sin(x) - \sin(x) - \sin(x) = -\sin(x)$$

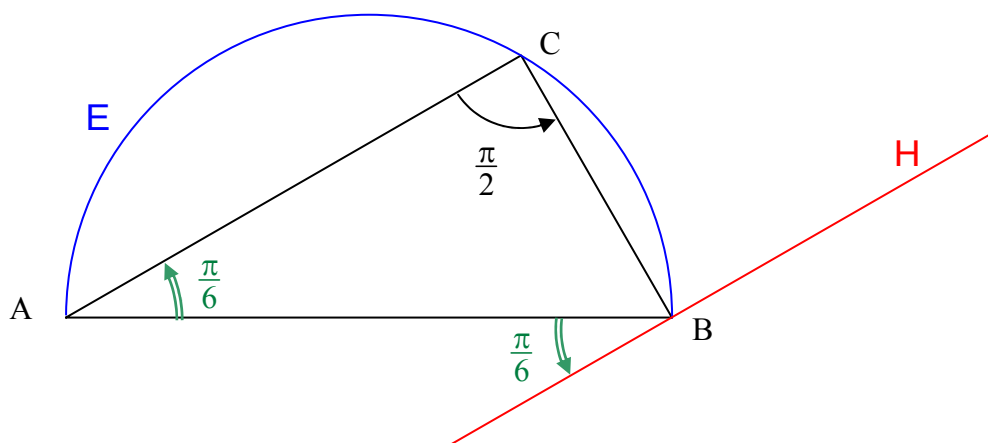
$$\begin{aligned} F(x) &= \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + \sin(x + 19\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(x + \pi) \\ &= \sin(x) - \cos(x) - \sin(x) = -\cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8} + \cos\frac{11\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\pi + \frac{3\pi}{8}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{8} - \cos\frac{3\pi}{8} = 0 \end{aligned}$$

Angles orientés: corrigé

Exercice 9

a.



b. L'ensemble de points M qui vérifient $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ est le demi-cercle de diamètre [AB] qui passe par C privé des points A et B car $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

c.

$$(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{6} + \pi + k\pi$$

$$(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BM}) = -\frac{5\pi}{6} + k\pi$$

$$(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BM}) = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

H est donc la droite passant par B qui fait un angle de $\frac{\pi}{6}$ avec la droite (AB) privée du point B

Exercice 10

$$1. \quad \sin 2x = \sin x \Leftrightarrow 2x = x + 2k\pi \text{ ou } 2x = \pi - x + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \text{ ou } 3x = (2k+1)\pi$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \text{ ou } x = (2k+1)\frac{\pi}{3}$$

$$\text{L'équation a donc 4 solutions dans }]-\pi; \pi] \quad S = \left\{ -\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}; \pi \right\}$$

$$2. \quad \sin 2x = \cos x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = x + 2k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{2} - 2x = -x + 2k'\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ et } k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } -x = -\frac{\pi}{2} + 2k'\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ et } k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} - 2k\frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} - 2k'\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ et } k' \in \mathbb{Z}$$



Angles orientés: corrigé

Il y a trois valeurs de k qui donnent des solutions dans $] -\pi ; \pi]$: $k = -1$ ou $k = 0$ ou $k = 1$

et une seule valeur de k' : $k' = 0$

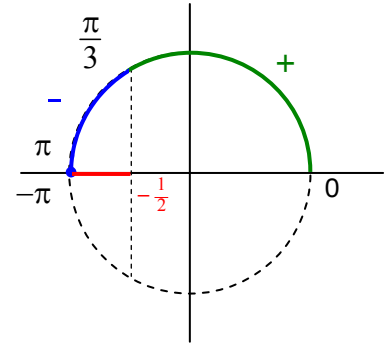
L'équation à donc 4 solutions dans $] -\pi ; \pi]$, $S = \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

Exercice 11

1. $g(x) = 0$ équivaut à $\cos x = -\frac{1}{2}$

Il n'y a qu'une solution sur $[0 ; \pi]$ $x = \frac{2\pi}{3}$ on a donc $g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$

Cette figure nous permet de dresser le tableau de signe



x	0	$2\pi/3$	π
$2\cos x + 1$	+	0	-

2. a. Le trinôme $2X^2 - X + 1$ a pour discriminant $\Delta = 3^2$

Il s'annule donc pour $X_1 = 1$ et pour $X_2 = \frac{1}{2}$

$$\text{Donc } 2X^2 - X + 1 = 2(X - 1)\left(X + \frac{1}{2}\right) = (X - 1)(2X + 1)$$

Si on pose $X = \cos x$, on a $f(x) = 2X^2 - X - 1 = (X - 1)(2X + 1) = (\cos x - 1)(2\cos x + 1)$

Or pour tous réel x , $\cos x \leq 1$ d'où $\cos x - 1 \leq 0$ et il n'y a égalité dans $[0 ; \pi]$ que pour $x = 0$

Et nous avons étudié le signe du deuxième facteur dans la question 1

On peut donc dresser le tableau de signe suivant :

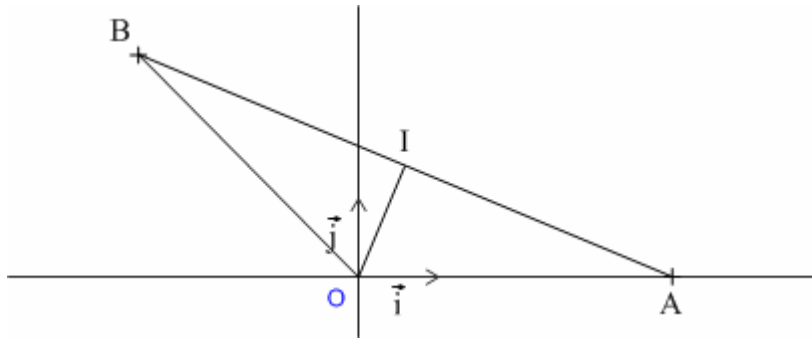
x	0	$2\pi/3$	π
$2\cos x + 1$	+	0	-
$\cos x - 1$	0	-	-
$f(x)$	0	-	+



Angles orientés: corrigé

Exercice 12

1.

2. Soit $[r; \theta]$ les coordonnées polaires de B on a

$$r^2 = x_B^2 + y_B^2 = (-2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 8 + 8 = 16 \quad \text{donc} \quad r = 4$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x_B}{r} = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{y_B}{r} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

Les coordonnées polaires de B sont $\left[4; \frac{3\pi}{4}\right]$ On a donc $OB = 4$ or $OA = \sqrt{4^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$ donc le triangle BOA est donc isocèle en O

$$3. I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \quad \text{d'où} \quad I\left(\frac{4 - 2\sqrt{2}}{2}; \frac{0 + 2\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{donc} \quad I(2 - \sqrt{2}; \sqrt{2})$$

$$4. \quad OI^2 = x_I^2 + y_I^2 = (2 - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 + 2 = 8 - 4\sqrt{2} = 4(2 - \sqrt{2})$$

$$\text{donc} \quad OI = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Le triangle BOA étant isocèle en O , la médiane (OI) est aussi la bissectrice de $\widehat{AOB}$ donc

$$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OI}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{8}$$

Les coordonnées polaires de I sont $\left[2\sqrt{2 - \sqrt{2}}; \frac{3\pi}{8}\right]$



Angles orientés: corrigé

5. On a $I(2 - \sqrt{2}; \sqrt{2})$ et $I(r \cos \frac{3\pi}{8}; r \sin \frac{3\pi}{8})$ avec $r = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ donc

$$\cos \frac{3\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{2 - \sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(2 + \sqrt{2})}{4 - 2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$6. \cos \frac{\pi}{8} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} \right) = \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} \right) = \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$