Série : Nombres complexes

Exercice 1

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On définit pour tout nombre complexe z différent de 0 et de (-3) , $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z(z+3)}$.

Ecrire sous forme algébrique les nombres suivants : $f(1-i)$ et $f(1+i)$.

2. Ecrire sous forme algébrique : $(2+i)^3+(1-2i)^3$

3. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équation suivantes :

 a) $3(z-i)-3i(z-2+3i)=(i-1)(z+i)$

 b) $z-2\overline{z}=9+2i$

4. Pour tout nombre complexe $z\neq i$, On pose $Z=\dfrac{z-1+2i}{z-i}$

 a) Déterminer l'ensemble (E) des points $M(z)$ pour lesquels $M'(Z)$ appartient à l'axe des réels.

 b) Déterminer l'ensemble (F) des points $M(z)$ pour lesquels $M'(Z)$ appartient à l'axe des imaginaires.

Exercice 2

Dans le plan complexe P, muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1$, $z_B = i$.

On pose $Z = \dfrac{z-1}{iz+1}$ pour tout $z \neq i$

1. Déterminer les éventuelles valeurs de z telles que : $Z = 1 + 2i$

2 . a) Montrer que $|iz+1| = |z-i|$

 b) Déterminer et tracer l'ensemble (E_1) des points M d'affixes z tels que $|Z| = 1$

3. a) En posant $z = x + iy$ où x et y sont des réels , vérifier que la partie réelle de Z est

$$\mathrm{Re}(Z) = \frac{x+y-1}{x^2+(1-y)^2} \quad \text{et que la partie imaginaire} \quad \mathrm{Im}(Z) = \frac{-x^2-y^2+x+y}{x^2+(1-y)^2}$$

 b) Déterminer et tracer l'ensemble (E_2) des points M d'affixes z tels que Z soit un nombre réel.

 c) Déterminer et tracer l'ensemble (E_3) des points M d'affixes z tels que Z soit un imaginaire pur .

Série : Nombres complexes

Exercice 3

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = 5\sqrt{2}(1+i)$ et $z_2 = -5(1+i\sqrt{3})$.

1) Déterminer le module et un argument des nombres complexes : z_1, z_2, $\overline{z_1}$, $\frac{1}{z_1}$.

2) Soit Z le nombre complexe tel que $z_1 Z = z_2$.

   Ecrire Z sous forme algébrique , puis sous forme trigonométrique.

3) Déduisez-en les valeurs exactes de $\cos(\frac{13\pi}{12})$ et $\sin(\frac{13\pi}{12})$.

Exercice 4

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) suivante :

$z^2-(1+a)(1+i)z+(1+a^2)i=0$ où a est réel.

1. a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-2i(1-a)^2$.

   b) Déterminer en fonction de a les solutions z_1 et z_2 de (E).

2. On désigne par M_1 et M_2 les images des solutions z_1 et z_2 dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On note M le milieu du segment $[M_1M_2]$.

   a) Vérifier que $z_M = \left(\frac{1+a}{2}\right)(1+i)$.

   b) Déterminer alors l'ensemble des points M lorsque a décrit $\mathbb{R}$.

Exercice 5

1. On considère l'équation (E) $z^3+8=0$, $z \in \mathbb{C}$.

   a) D éterminer les réels a,b et c tels que $z^3+8=(z+2)(az^2+bz+c)$.

   b) Résoudre l'équation (E).

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=2$, $z_B=-1+i\sqrt{3}$ et $z_C=-1-i\sqrt{3}$.

   a) Faire une figure.

   b) Prouver que le triangle ABC est équilatéral.

Série : Nombres complexes

Exercice 6

On considère l'équation (E) : $z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = 0$ où z désigne un nombre complexe.

Partie A :

1. a) Montrer que (E) admet une solution réelle, notée z_1.

b) Déterminer les deux nombres complexes α et β tels que, pour tout nombre complexe z, on ait :

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = (z - z_1)(z - 2 - 2i)(\alpha z + \beta)$$

c) Résoudre (E)

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives $a = 1$, $b = 2 + 2i$ et $c = 1 - i$.

a) Représenter A, B et C.

b) Déterminer la nature du triangle OBC.

Exercice 7

Soit P le polynôme de variable complexe z défini par : $P(z) = z^4 - \sqrt{2}\, z^3 - 4\sqrt{2}\, z - 16$

1. Donner la forme algébrique de $P(iy)$ où $y \in \mathbb{R}$

2. En déduire que l'équation $P(z) = 0$ admet deux solutions imaginaires pures.

3. Déterminer les réels a, b et c tels que : $P(z) = (z^2 + 4)(az^2 + bz + c)$

4. Résoudre alors $P(z) = 0$

5. On désigne par A, B, C, D les images des racines de l' équation $P(z) = 0$ dans un repère orthonormé

Montrer que ces 4 points sont sur un même cercle de centre Ω d'affixe $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Nombres complexes : corrigé

Exercice 1

1) $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z(z+3)}$

$$f(1-i)=\frac{(1-i)^2-1}{(1-i)(1-i+3)}=\frac{1-2i-1-1}{4-i-4i^2-1}=-\frac{(1-2i)(3+5i)}{(3-5i)(3+5i)}=\frac{7}{34}-\frac{11}{34}i$$

$$f(\bar z)=\frac{\bar z^2-1}{\bar z(\bar z+3)}=\frac{\overline{z^2}-1}{\overline{z(z+3)}}=\frac{\overline{z^2-1}}{\overline{z(z+3)}}=\overline{\left(\frac{z^2-1}{z(z+3)}\right)}=\overline{f(z)}\quad .\qquad \text{Donc } f(1+i)=\overline{f(1-i)}=\frac{7}{34}+\frac{11}{34}i$$

2) $u=(2+i)^3+(1-2i)^3=8+12i-6-i+1-6i-12-8i=-9-2i$

3)a) $3(z-i)-3i(z-2+3i)=(i-1)(z+1)\Leftrightarrow 3z-3iz-iz+z=i-1-3i-9$

$$\Leftrightarrow z(4-4i)=-10-2i\Leftrightarrow z=\frac{-10-2i}{4-4i}$$

Or $\dfrac{-10-2i}{4-4i}=\dfrac{-5-2i}{2(1-i)}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{(5+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-\dfrac{3}{4}-\dfrac{7}{4}i$ Donc $S=\{-\dfrac{3}{4}-\dfrac{7}{4}i\}$

b) $z-2\bar z=9+2i$ Pour résoudre cette équation on pose: $z=x+iy$, $\bar z=x-iy$

$z-2\bar z=9+2i\Leftrightarrow -x+3iy=9+2i\Leftrightarrow x=-9\ et\ y=\dfrac{2}{3}$ d'où $z=-9+\dfrac{2}{3}i$

4) $Z=\dfrac{z-1+2i}{z-i}$ *avec* $z\neq i$. On pose $z=x+iy$ et $Z=X+iY$

a) Ensemble des points M(z) pour lesquels Le point M'(Z) appartient à l'axe des réels (E)

$$X+iY=\frac{x+iy-1+2i}{x+iy-i}=\frac{(x-1)+i(y+2)}{x+i(y-1)}=\frac{[(x-1)+i(y+2)][x-i(y-1)]}{[x+i(y-1)]\ .\ [x-i(y-1)]}$$

$$=\frac{(x-1)x+(y+2)(y-1)-i(x-1)(y-1)+ix(y+2)}{x^2+(y-1)^2}=\frac{x^2-x+y^2+y-2+i\,(3x+y-1)}{x^2+(y-1)^2}$$

$$=\frac{x^2-x+y^2+y-2}{x^2+(y-1)^2}\quad i\,\frac{3x+y-1}{x^2+(y-1)^2}$$

D'où $\mathrm{Re}(Z)=X=\dfrac{x^2-x+y^2+y-2}{x^2+(y-1)^2}$ et $\mathrm{Im}(Z)=Y=\dfrac{3x+y-1}{x^2+(y-1)^2}$

M' appartient à l'axe des réels signifie que $\mathrm{Im}(Z)=0\Leftrightarrow\dfrac{3x+y-1}{x^2+(y-1)^2}=0\Leftrightarrow 3x+y-1=0$

Donc (E) est la droite d'équation $3x+y-1=0$ privé de son point A d'affixe i.

Nombres complexes : corrigé

b) Ensemble des points M(z) pour lesquels Le point M'(Z) appartient à l'axe des imaginaires (F)

$$\mathrm{Re}(Z) = X = \frac{x^2 - x + y^2 + y - 2}{x^2 + (y-1)^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(Z) = Y = \frac{3x + y - 1}{x^2 + (y-1)^2}$$

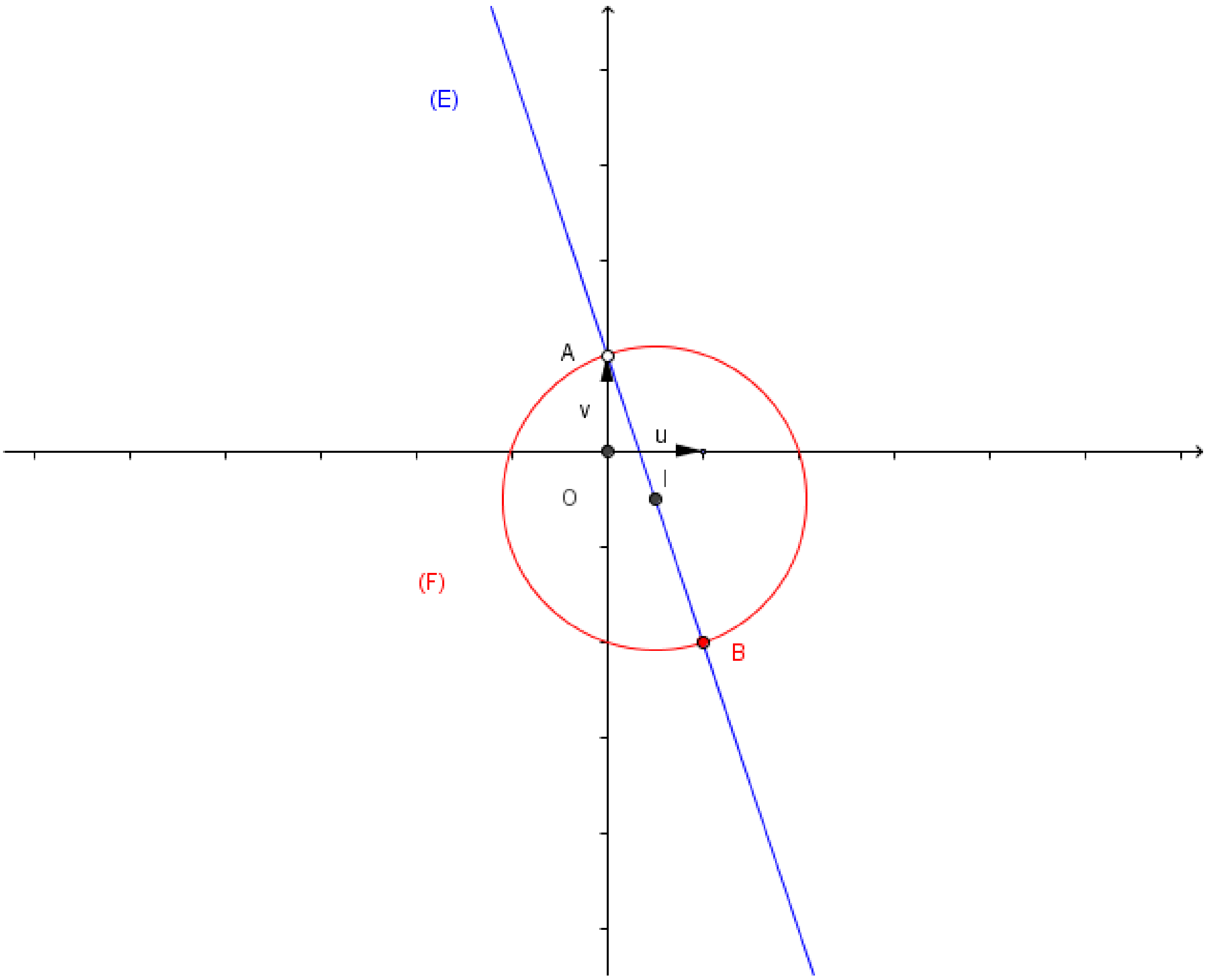
M'(Z) appartient à l'axe des imaginaires signifie que $\mathrm{Re}(Z) = 0$.

$$\Leftrightarrow X = \frac{x^2 - x + y^2 + y - 2}{x^2 + (y-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

On reconnait l'équation cartésiènne du cercle Γ de centre le point $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $r = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Ainsi l'ensemble (F) est le cercle d'équation $\left(x \quad \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$ privé du point $A(i)$.



Nombres complexes : corrigé

Exercice 2

1. Pour $z \neq i$, $\dfrac{z-1}{iz+1} = 1+2i \Leftrightarrow z-1 = (1+2i)(iz+1) \Leftrightarrow z-1 = (-2+i)z+1+2i$

$$\Leftrightarrow (3-i)z = 2+2i \Leftrightarrow (3+i)(3-i)z = (3+i)(2+2i)$$

$$\Leftrightarrow 10z = 4+8i \Leftrightarrow z = \frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$$

2. a) $|iz+1| = |i(z-i)| = |i|.|z-i| = |z-i|$.

b) Pour $z \neq i$, $|Z| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-1}{iz+1}\right| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|z-1|}{|iz+1|} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|z-1|}{|z-i|} = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i|$

$$\Leftrightarrow AM = BM.$$

Donc l'ensemble (E_1) est la médiatrice du segment [AB].

3. a) Si z = x + iy , avec (x, y) $\in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$ alors

$$Z = \frac{(x+iy)-1}{i(x+iy)+1} = \frac{(x-1)+iy}{(1-y)+ix} = \frac{[(x-1)+iy][(1-y)-ix]}{x^2+(1-y)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(1-y)+xy+i[-x(x-1)+y(1-y)]}{x^2+(1-y)^2} = \frac{x+y-1+i[-x^2+x-y^2+y]}{x^2+(1-y)^2}$$

D'où $\quad \mathrm{Re}(Z) = \dfrac{x-y+1}{x^2+(1-y)^2}$ et $\mathrm{Im}(Z) = \dfrac{-x^2-y^2+x+y}{x^2+(1-y)^2}$.

b) Z est réel $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2-y^2+x+y = 0 \\ (x,y) \neq (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+y^2-y = 0 \\ (x,y) \neq (0,1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \\ (x,y) \neq (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \\ (x,y) \neq (0,1) \end{cases}$$

L'ensemble (E_2) est donc le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ privé du point B.

c) Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+1 = 0 \\ (x,y) \neq (0,1) \end{cases}$.

L'ensemble (E_3) est donc la droite d'équation x – y + 1 = 0 privé du point B.

Nombres complexes : corrigé

Exercice 3

$z_1 = 5\sqrt{2}(1+i)$ *et* $z_2 = -5(1+i\sqrt{3})$. Posons $\arg z_1 = \theta_1 (2\pi)$ et $\arg z_2 = \theta_2 (2\pi)$

1) Module et arguments des nombres complexes: $z_1, z_2, \overline{z_1}, \dfrac{1}{z_1}$

$|z_1| = \left|5\sqrt{2}(1+i)\right| = 5\sqrt{2}\,|1+i| = 5\sqrt{2}\times\sqrt{2} = 10$

On a $\cos\theta_1 = \sin\theta_1 = \dfrac{5\sqrt{2}}{10} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *donc* $\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}(2\pi)$.

$|z_2| = \left|-5(1+i\sqrt{3})\right| = 5\left|1+i\sqrt{3}\right| = 10.$

$\cos\theta_1 = \dfrac{-5}{10} = \dfrac{-1}{2}$ *et* $\sin\theta_2 = \dfrac{-5\sqrt{3}}{10} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ *donc* $\theta_2 = -\dfrac{2\pi}{3}(2\pi)$.

$|\overline{z_1}| = |z_1| = 10$; $\arg \overline{z_1} = -\arg z_1 = -\dfrac{\pi}{4}(2\pi)$. $\left|\dfrac{1}{z_1}\right| = \dfrac{1}{|z_1|} = \dfrac{1}{10}$; $\arg\dfrac{1}{z_1} = -\arg z_1 = -\dfrac{\pi}{4}(2\pi)$

2) Soit Z le nombre complexe tel que : $z_1 Z = z_2$

$Z = \dfrac{z_2}{z_1}$ *d'où* $|Z| = \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = 1$. $\arg Z = \arg\dfrac{z_2}{z_1} = \arg z_2 - \arg z_1 (2\pi)$

$\arg Z = -\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}(2\pi)$ $\arg Z = \dfrac{-11\pi}{12}(2\pi) = \dfrac{13\pi}{12}(2\pi)$.

On en déduit la forme trigonométrique de Z : $Z = \cos\left(\dfrac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$

Forme algébrique de Z:

$$Z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{-5(1+i\sqrt{3})}{5\sqrt{2}(1+i)} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\times\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(-1-\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$$

$$Z = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \qquad Z = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

3) En égalisant les formes algébrique et trigonométrique de Z on a

$$Z = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = \cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$$

on en déduit que : $\cos\left(\dfrac{13\pi}{12}\right) = \dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{13\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Nombres complexes : corrigé

Exercice 4

1. a) $-2i(1-a)^2=(1-i)^2(1-a)^2=\left[(1-i)(1-a)\right]^2$

Donc les racines carrées de $-2i(1-a)^2$ sont

$(1-a)(1-i)=1-a-i(1-a)$ et $-(1-a)(1-i)=-1+a+i(1-a)$.

b) Le discriminant de l'équation (E) est $\Delta=-2i(1-a)^2$ et une racine carrée de Δ

est $\delta=(1-a)(1-i)=1-a-i(1-a)$.

Les solutions de (E) sont donc :

$$z_1=\frac{(1+a)(1+i)-(1-a)(1-i)}{2}=\frac{2a+2i}{2}=a+i$$

et $$z_2=\frac{(1+a)(1+i)+(1-a)(1-i)}{2}=\frac{2+2ia}{2}=1+ia.$$

2. a) M est milieu de $[M_1M_2] \Leftrightarrow z_M=\dfrac{z_1+z_2}{2} \Leftrightarrow z_M=\dfrac{(1+a)}{2}(1+i)$.

b) $z_M=\dfrac{(1+a)}{2}(1+i) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\dfrac{(1+a)}{2}(\vec{u}+\vec{v})$.

Ainsi lorsque a varie dans $\mathbb{R}$, M décrit la droite (D) passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}+\vec{v}$.

Exercice 5

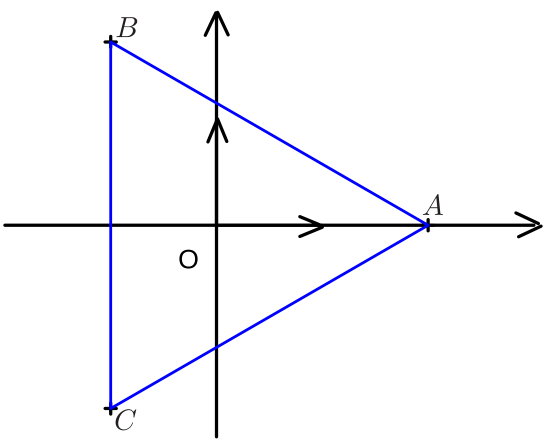
1. a) On a $(z+2)(az^2+bz+c)=az^3+bz^2+cz+2az^2+2bz+2c=az^3+(b+2a)z^2+(c+2b)z+2c$,

d' où par identi cation : $$\begin{cases} a &= 1\\ b+2a &= 0\\ c+2b &= 0\\ 2c &= 8\end{cases}$$

On obtient $a=1$, $b=\ 2$, $c=4$ d'où $z^3+8=(z+2)(z^2-2z+4)$.

b) Les racines de l'équation $z^2-2z+4=0$ sont $1-i\sqrt{3}$ et $1+i\sqrt{3}$ donc l'équation (E) a pour ensemble de solution $S=\{-2,1-i\sqrt{3},1+i\sqrt{3}\}$.

2. a)



b) On a : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$=\sqrt{3^3+(\sqrt{3})^2}$

$=2\sqrt{3}$

De même : $AC=\sqrt{3^3+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

et : $BC=\sqrt{0^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

Donc le triangle ABC est équilatéral.

Nombres complexes : corrigé

Exercice 6

1) le réel x est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $x^3 - (4+i)x^2 + (7+i)x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x^3 - 4x^2 - ix^2 + 7x + ix - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x^3 - 4x^2 + 7x - 4\right) + i\left(x - x^2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = 0 \\ x\left(1 - x\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = -4 \neq 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = 1 - 4 + 7 - 4 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Donc le réel 1 est solution de l'équation (E) .

2) a) $(z-1)(z-2-2i)(\alpha z+\beta) = \left(z^2 - 2z - 2iz - z + 2 + 2i\right)\left(\alpha z + \beta\right) = \left[z^2 + \left(-3-2i\right)z + \left(2+2i\right)\right]\left(\alpha z + \beta\right)$

$$= \alpha z^3 + \beta z^2 + \alpha\left(-3-2i\right)z^2 + \beta\left(-3-2i\right)z + \alpha\left(2+2i\right)z + \beta\left(2+2i\right)$$

$$= \alpha z^3 + \left[\beta + \alpha\left(-3-2i\right)\right]z^2 + \left[\beta\left(-3-2i\right) + \alpha\left(2+2i\right)\right]z + \beta\left(2+2i\right)$$

Ecrire que, pour tout nombre complexe z, $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z-1)(z-2-2i)(\alpha z+\beta)$

équivaut à, pour tout nombre complexe z,
$z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = \alpha z^3 + \left[\beta + \alpha\left(-3-2i\right)\right]z^2 + \left[\beta\left(-3-2i\right) + \alpha\left(2+2i\right)\right]z + \beta\left(2+2i\right)$

$$\text{d'où } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + \alpha\left(-3-2i\right) = -\left(4+i\right) \\ \beta\left(-3-2i\right) + \alpha\left(2+2i\right) = 7+i \\ \beta\left(2+2i\right) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -4 - i + 3 + 2i = -1 + i \\ \beta\left(-3-2i\right) = 5 - i \\ \beta\left(2+2i\right) = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 + i \\ \beta = \dfrac{5-i}{-3-2i} = \dfrac{\left(5-i\right)\left(-3+2i\right)}{9+4} = \dfrac{-15+10i+3i+2}{13} = \dfrac{-13+13i}{13} = -1+i \\ \beta = \dfrac{-4}{2+2i} = \dfrac{-4}{2\left(1+i\right)} = \dfrac{-2\left(1-i\right)}{1+1} = -1+i \end{cases}$$

Finalement, pour tout nombre complexe z, $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z-1)(z-2-2i)(z-1+i)$

b) (E) équivaut à $(z-1)(z-2-2i)(z-1+i) = 0$

L'équation (E) a donc trois solutions : le réel 1 et les complexes $2+2i$ et $1-i$

Nombres complexes : corrigé

3) $\frac{c}{b} = \frac{1-i}{2+2i} = \frac{(1-i)(2-2i)}{8} = \frac{-4i}{8} = -\frac{i}{2}$ est imaginaire pur

d'où $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux donc OBC est un triangle rectangle en O

Exercice 8

1. $y \in \mathbb{R},\ P(iy) = y^4 + i\sqrt{2}\,y^3 - 4\sqrt{2}\,iy - 16 = \left(y^4 - 16\right) + i\left(\sqrt{2}\,y^3 - 4\sqrt{2}\,y\right)$.

2. $y \in \mathbb{R}$ et $P(iy) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - 16 = 0 \\ \sqrt{2}\,y^3 + 4\sqrt{2}\,y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)(y+2)\left(y^2+4\right) = 0 \\ y\sqrt{2}(y-2)(y+2) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow\ y = -2 \text{ ou } y = 2.$$

Donc l'équation P(z) = 0 admet deux solutions imaginaires pures 2i et -2i.

3. Pour tout nombre complexe z,

$\left(z^2+4\right)\left(az^2+bz+c\right) = az^4 + bz^3 + 4az^2 + 4bz + 4c$.

Par identification avec P(z), on obtient : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -\sqrt{2} \\ 4a = 4 \\ 4b = 4\sqrt{2} \\ 4c = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\sqrt{2} \\ c = -4 \end{cases}$.

4. P(z) = 0 $\Leftrightarrow \left(z^2+4\right)\left(z^2 - z\sqrt{2} - 4\right) = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4$ ou $z^2 - z\sqrt{2} - 4 = 0$

Or $z^2 = -4 \Leftrightarrow z^2 = (2i)^2 \Leftrightarrow z = 2i$ ou $z = -2i$

Et le discriminant de l'équation du second degré $z^2 - z\sqrt{2} - 4 = 0$ est

$\Delta = \left(-\sqrt{2}\right)^2 - 4(-4) = 18 = \left(3\sqrt{2}\right)^2$ donc les solutions de cette équation sont

$\frac{\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$ et $\frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

Par suite l'ensemble de solution de l'équations P(z) = 0 est S = $\left\{2i, -2i, -\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right\}$.

5. Soit $\Omega\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, désignons par A, B, C et D les images dans le plan complexe

respectives des solutions $2i, -2i, -\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$ de l'équation P(z) = 0.

$\Omega A = \left|2i - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{2} + 4} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\Omega B = \left|-2i - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{2} + 4} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\Omega C = \left|-\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \left|-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\Omega D = \left|2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \left|\frac{3\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Donc les points A, B, C et D sont situés sur le cercle de centre $\Omega\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et de rayon $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Nombres complexes : corrigé

Partie B

1) $\frac{c}{b} = \frac{1-i}{2+2i} = \frac{(1-i)(2-2i)}{8} = \frac{-4i}{8} = -\frac{i}{2}$ est imaginaire pur

d'où $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux donc OBC est un triangle rectangle en O