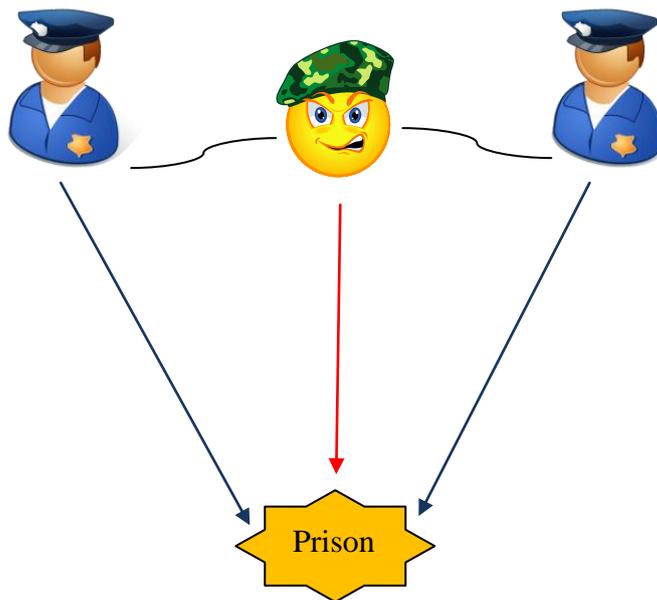
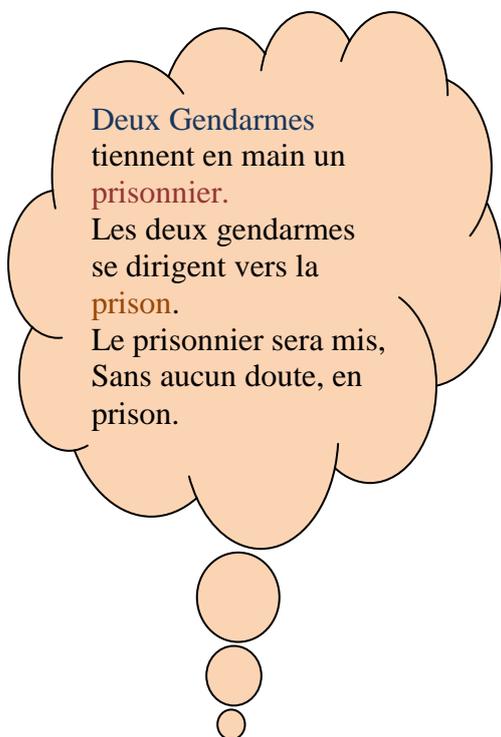


Ce paragraphe de cours est un complément des propriétés vues en 3^{ème} Année secondaire.

Imaginons :



Théorème des gendarmes ou théorème d'encadrement

$\lim_{x \rightarrow a}$ désigne la limite en a réel fini ou en $+\infty$ ou en $-\infty$ à droite en a ou à gauche en a .

ℓ désigne un réel fini.

Soit f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle I (un voisinage de a).

Si pour tout x de I , $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$,

alors, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Exemple : Soit $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Pour tout x réel, $-1 \leq \cos x \leq 1$

D'où, pour tout x de $]0, +\infty[$, on a : $-\frac{1}{x} \leq \cos x \leq \frac{1}{x}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

D'autre part, pour tout x de $]-\infty, 0[$, on a : $\frac{1}{x} \leq \cos x \leq -\frac{1}{x}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-\frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Corollaire

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I (un voisinage de a).

Si pour tout x de I , $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Exemple : Soit $f(x) = 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, où $x \in \mathbb{R}^*$. Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Pour tout x de \mathbb{R}^* , $f(x) - 1 = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

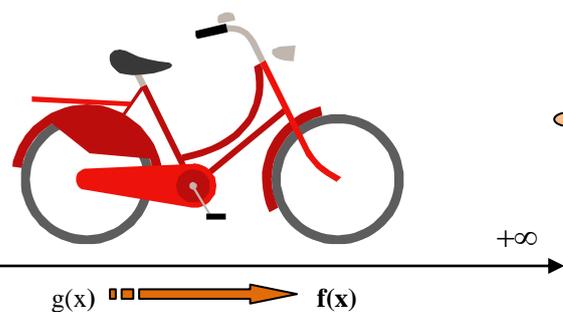
On en déduit que, pour tout x de \mathbb{R}^* , on a : $|f(x) - 1| = x^2 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|$.

Or, pour tout x de \mathbb{R}^* , $\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$ donc $x^2 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2$.

Il en résulte que, pour tout x de \mathbb{R}^* , $|f(x) - 1| \leq x^2$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Imaginons encore :



La roue arrière de la bicyclette va vers l'avant, elle pousse donc la roue avant vers l'avant.

Théorème

$\lim_{x \rightarrow a}$ désigne la limite en a réel fini ou en $+\infty$ ou en $-\infty$ à droite en a ou à gauche en a .

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I (un voisinage de a).

- Si pour tout x de I , $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.
- Si pour tout x de I , $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Exemple : Soit $f(x) = x - \sin x$, calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

- ✓ Pour tout x réel, on a : $-1 \leq -\sin x$, donc $x - 1 \leq x - \sin x$.
Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- ✓ Pour tout x réel, on a : $-\sin x \leq 1$, donc $x - \sin x \leq x + 1$.
Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.