Loi binomiale- uniforme- exponentielle

Introduction

Dans le programme de 4 Année, il y a 3 lois de probabilité : la loi binomiale (ou schéma de Bernoulli), la loi uniforme et la loi exponentielle.

Au départ il y a une différence fondamentale entre la loi binomiale et les 2 autres :
- La loi binomiale est une loi **discrète** ce qui veut dire que la variable aléatoire ne prend qu'un nombre fini de valeurs isolées les une des autres.

- Les 2 autres lois sont des lois de probabilité **continue** (ou lois à densité), c'est-à-dire que la variable aléatoire peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle donné borné ou infini (donc dans les 2 cas une infinité de valeurs)

Loi binomiale

Il faut d'abord définir "une épreuve de Bernoulli", c'est une expérience avec 2 issues possibles , l'une souvent appelée "succès" de probabilité p et l'autre, évidemment de probabilité (1-p)

On est en présence d'une loi binomiale X (ou schéma de Bernoulli) lorsqu'il y a répétition de n mêmes épreuves et que ces épreuves sont **indépendantes** les unes des autres. On dit alors que l'on a la loi binomiale B(n, p)

Soit $k \in \{0,1,2,...,n\}$, la probabilité d'obtenir k succès est $P(X=k)=C_n^k p^k.(1-p)^{n-k}$.

Son espérance mathématique est E(X) = n.p et sa variance est V(X) = n.p.(1-p) .

(Ces formules sont à savoir)

Exemple :

La probabilité pour qu'un élève soit reçu au Bac est 0,8. On rencontre 12 candidats, quelle est la probabilité :

a) que 10 d'entre eux exactement aient obtenu le Bac ?
b) qu'au moins 9 d'entre eux aient obtenu le Bac ?

On a une épreuve de Bernoulli avec p=0,8. On admet que les résultats des 12 candidats sont indépendants les uns des autres, on a donc une loi binomiale X avec comme paramètres n=12 et p=0,8.

a) $P(X=10)=C_{12}^{10}(0,8)^{10}.(0,2)^2 \approx 0,28$.

Loi binomiale- uniforme- exponentielle

b) $P(X \geq 9) = P(X=9)+P(X=10)+P(X=11)+P(X=12)$

$$= C_{12}^{9}(0,8)^{10}.(0,2)^{2} + C_{12}^{10}(0,8)^{10}.(0,2)^{2} + C_{12}^{11}(0,8)^{11}.(0,2) + C_{12}^{12}(0,8)^{12}$$

$$\approx 0,79$$

Lois de probabilité continue (ou à densité)

D'une manière générale : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On appelle densité de probabilité sur I toute fonction f définie sur I vérifiant les 3 conditions suivantes :
- f est continue sur I
- f est positive sur I
- l'aire de la partie du plan limitée par la courbe représentative de f et l'axe des abscisses sur l'intervalle I est égale à l'unité d'aire.

On définit la loi de probabilité P de densité f sur l'intervalle I en associant à tout intervalle [c, d] inclus dans I le nombre $P([c,d]) = \int_c^d f(t)dt$.

Loi uniforme

Soit l'intervalle I= [a, b] où a < b. On appelle loi uniforme sur l'intervalle I = [a, b], la loi de probabilité continue sur I dont la densité est la fonction constante égale à $f : t \mapsto \frac{1}{b-a}$

La probabilité d'un intervalle [c, d] inclus dans I est alors égale à :

$$P([c,d]) = \int_c^d \frac{1}{b-a}dt = \frac{d-c}{b-a}.$$

$$P(\{c\}) = \int_c^c \frac{1}{b-a}dt = 0$$

Soit la variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur a, b],

Son espérance mathématique est $E(X) = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b+a}{2}$

Loi binomiale- uniforme- exponentielle

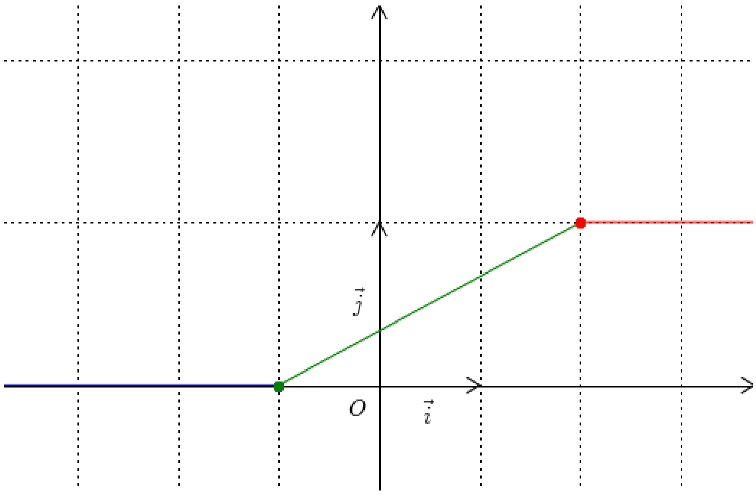
et sa variance est $V(X) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}dx - (E(X))^2 = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Sa fonction de répartition F est définie :

$F(x) = 0$, si $x < a$,

$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$, si $a \leq x \leq b$

et $F(x) = 1$, si $x > b$.



Exemple :

Un élève a eu la bonne habitude de se mettre au lit pour dormir tous les soirs entre 22 h et 22h45. On admet que l'heure de se mettre au lit suit une loi uniforme sur l'intervalle [0, 45]. Quelle est la probabilité que l'élève se met au lit avant 22h25 ?

On cherche la probabilité de l'intervalle [0,25] : $P([0,25]) = \frac{25-0}{45-0} = \frac{5}{9}$

Loi exponentielle

On appelle loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel positif fixé, la loi continue admettant pour densité la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

La probabilité d'un intervalle [c, d] inclus dans $[0,+\infty[$ est donc :

$$P([c,d]) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda t}dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_c^d = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$$

$$P(\{c\}) = \int_c^c \lambda e^{-\lambda t}dt = 0$$

On rencontre, entre autres, cette loi dans des problèmes de **durée de vie** d'un appareil ou de désintégration d'une substance radioactive.

Loi binomiale- uniforme- exponentielle

Soit la variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ ,

$P(X > c) = e^{-\lambda c}$ et $P(X \leq d) = 1 - e^{-\lambda d}$

Son espérance mathématique est $E(X) = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_0^b \lambda t e^{-\lambda t}\, dt = \dfrac{1}{\lambda}$.

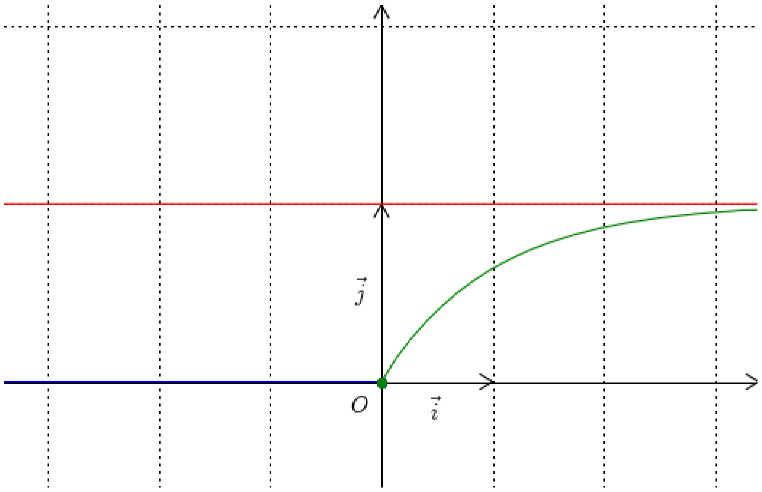
Sa variance est $V(X) = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_0^b \lambda t^2 e^{-\lambda t}\, dt - (E(X))^2 = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Sa fonction de répartition F est

définie par :

$F(x) = 0$, si $x < 0$

et $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, si $x \geq 0$



Exemple :

La durée de vie d'un composant électronique est une variable aléatoire T de densité exponentielle de paramètre $\lambda = 2 \times 10^{-4}$.
T est exprimée en heures. Calculer les probabilités de l'événement (T<2500) et celle de l'événement $(T \geq 7000)$.

$P(T < 2500) = 1 - e^{-2 \times 10^{-4} \times 2500} = 1 - e^{-0,5} \approx 0,39$

$P(T \geq 7000) = e^{-2 \times 10^{-4} \times 7000} = e^{-1,4} \approx 0,25$.

Remarque très importante

Si la variable aléatoire suit une loi exponentielle de paramètre λ alors :

$$P((X > t+s) \mid (X > t)) = \frac{P(X > t+s) \cap P(X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s)$$