Fiche : Congruence

Définition

Soit un naturel $n \geqslant 2$, a et b deux entiers relatifs.

On dit que a est congru à b modulo n si et seulement si a -b est un multiple de n.

On note : $a \equiv b \pmod{n}$

Théorème

Soit un naturel $n \geqslant 2$, a et r deux entiers relatifs .

a est congru à **r** modulo n si et seulement si r est le reste de la division euclidienne de a par n

Propriétés

Soit un naturel $n \geqslant 2$. a, b et c sont trois entiers relatifs.

- $\boldsymbol{a \equiv b} \pmod{n} \Leftrightarrow \boldsymbol{b \equiv a} \pmod{n}$
- $\boldsymbol{a \equiv 0} \pmod{n} \Leftrightarrow \boldsymbol{n}$ divise $\boldsymbol{a}$
- **Si** $\boldsymbol{a \equiv b} \pmod{n}$ **et** $\boldsymbol{b \equiv c} \pmod{n}$ **alors** $\boldsymbol{a \equiv c} \pmod{n}$

Règles de calcul

- Soit un naturel $n \geqslant 2$; a, b , c et d quatre entiers relatifs

  Si $\boldsymbol{a \equiv b} \pmod{n}$ et $\boldsymbol{c \equiv d} \pmod{n}$

  alors $\boldsymbol{a+c \equiv b+d} \pmod{n}$, $\boldsymbol{a-c \equiv b-d} \pmod{n}$, $\boldsymbol{ac \equiv bd} \pmod{n}$

- Soit un naturel $n \geqslant 2$; a et b deux entiers relatifs tel que $\boldsymbol{a \equiv b} \pmod{n}$.

  Pour tout entier relatif k, $\boldsymbol{a+k \equiv b+k} \pmod{n}$, $\boldsymbol{a-k \equiv b-k} \pmod{n}$, $\boldsymbol{ka \equiv kb} \pmod{n}$

  Pour toutentiernaturel p, $\boldsymbol{a^p \equiv b^p} \pmod{n}$