

EXAMEN DU BACCALAUREAT	Epreuve : MATHEMATIQUES
SESSION DE JUIN 2013	Durée :3H ***** Coefficient : 3
Section : Sciences de l'informatique	SESSION PRINCIPALE
Corrigé proposé par : FARID ABIDI ***** Lycée Ibn Khladoun à RADES	

Exercice 1 :

1) $z^2 - 2(2 - i)z + 7 - 4i = 0$

le discriminant de cette équation est : $\Delta = 4(2 - i)^2 - 4(7 - 4i) = -16 = (4i)^2$

Remarque : le discriminant réduit est $\Delta' = (2 - i)^2 - (7 - 4i) = -4 = (2i)^2$

D'où $z' = 2 + i$ et $z'' = 2 - 3i$

Donc $S_{\mathbb{C}} = \{2 + i, 2 - 3i\}$

2) a) $(z + 2 + i)(z^2 - 2(2 - i)z + 7 - 4i)$

$$= z^3 - 2(2 - i)z^2 + (7 - 4i)z + (2 + i)z^2 - 2(2 + i)(2 - i) + (2 + i)(7 - 4i)$$

$$= z^3 - (4 - 2i - 2 - i)z^2 - (-7 + 4i + 10)z + 14 - 8i + 7i + 4$$

$$= z^3 - (2 - 3i)z^2 - (3 + 4i)z + 18 - i$$

$$= P(z)$$

b) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z + 2 + i = 0$ ou $z^2 - 2(2 - i)z + 7 - 4i = 0$

$$\Leftrightarrow z = -2 - i \text{ ou } z = 2 + i \text{ ou } z = 2 - 3i$$

Donc $S_{\mathbb{C}} = \{-2 - i, 2 + i, 2 - 3i\}$

3) a) $z_A = 2 + i \Leftrightarrow A(2,1)$

$$z_B = -1 - 3i \Leftrightarrow B(-1, -3i)$$

$$z_C = -2 - i \Leftrightarrow C(-2, -1)$$

$$z_D = 2 - 3i \Leftrightarrow D(2, -3)$$

b) $AB = |z_B - z_A| = |-1 - 3i - 2 - i|$

$$= |-3 - 4i| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$AC = |z_C - z_A| = |-2 - i - 2 - i|$$

$$= |-4 - 2i| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |-2 - i + 1 + 3i|$$

$$= |-1 + 2i| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

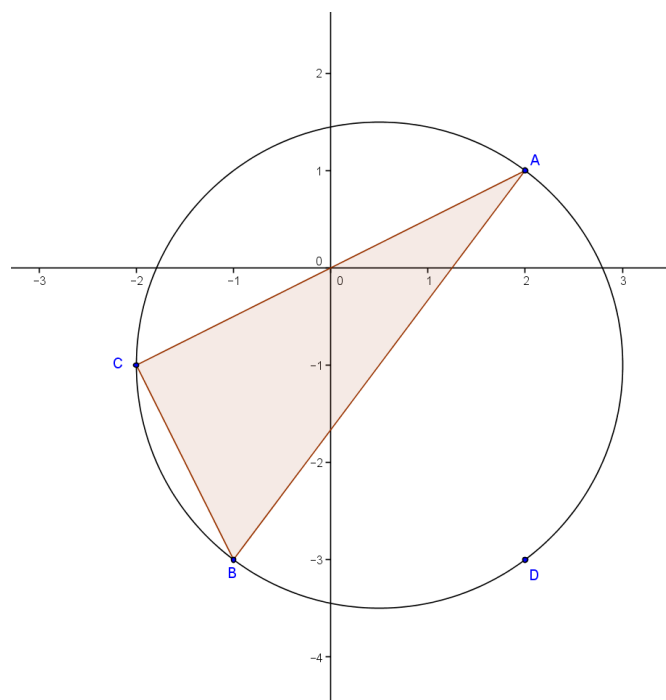
$$AC^2 + BC^2 = 20 + 5 = 25 = AB^2 \text{ donc } ABC$$

est un triangle rectangle en C.

c) ABC est inscrit dans le cercle Γ de diamètre $[AB]$ c'est-à-dire Γ est le cercle de centre I , le

milieu du segment $[AB]$ et de rayon $R = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2}$

$$\text{Avec } z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2 + i - 1 - 3i}{2} = \frac{1}{2} - i$$



$$\text{D'autre part, } ID = |z_D - z_I| = \left| 2 - 3i - \frac{1}{2} + i \right| = \left| \frac{3}{2} - 2i \right| = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = R \text{ d'où } D \in \Gamma$$

Exercice 2 :

$$1) \text{ a) } p(F) = \frac{52}{100} = \frac{13}{25}; p(I) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}; p(F \cap I) = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$$

$$\text{b) } p(I|F) = \frac{p(F \cap I)}{p(F)} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{13}{25}} = \frac{3}{13}$$

$$2) \text{ a) } p(I|\bar{F}) = \frac{p(\bar{F} \cap I)}{p(\bar{F})}$$

$$\text{Or } p(I) = p(F \cap I) + p(\bar{F} \cap I) \text{ donc } p(\bar{F} \cap I) = p(I) - p(F \cap I) = \frac{1}{5} - \frac{3}{25} = \frac{2}{25}$$

$$\text{Et } p(\bar{F}) = 1 - p(F) = 1 - \frac{13}{25} = \frac{12}{25}$$

$$\text{Donc } p(I|\bar{F}) = \frac{\frac{2}{25}}{\frac{12}{25}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\text{b) } p(\bar{F} \cap \bar{I}) = p(\bar{F}) \times p(\bar{I}|\bar{F}) = p(\bar{F}) \times (1 - p(I|\bar{F})) = \frac{12}{25} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{12}{25} \times \frac{5}{6} = \frac{2}{5}$$

Exercice 3 :

1) a) La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc (C) est la courbe de la fonction $\ln$ et (Γ) est celle de u .

b) Sur $]0, 1[$, (C) est en dessous de (Γ)
pour $x = 1$, (C) et (Γ) se coupent
sur $]1, +\infty[$, (C) en dessus de (Γ)

x	0	1	$+\infty$
$\ln x - u(x)$		-	0
		-	+

$$2) f(x) = (x - 1) \ln x; D_f =]0, +\infty[$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x} \ln x = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

La courbe C_f admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$

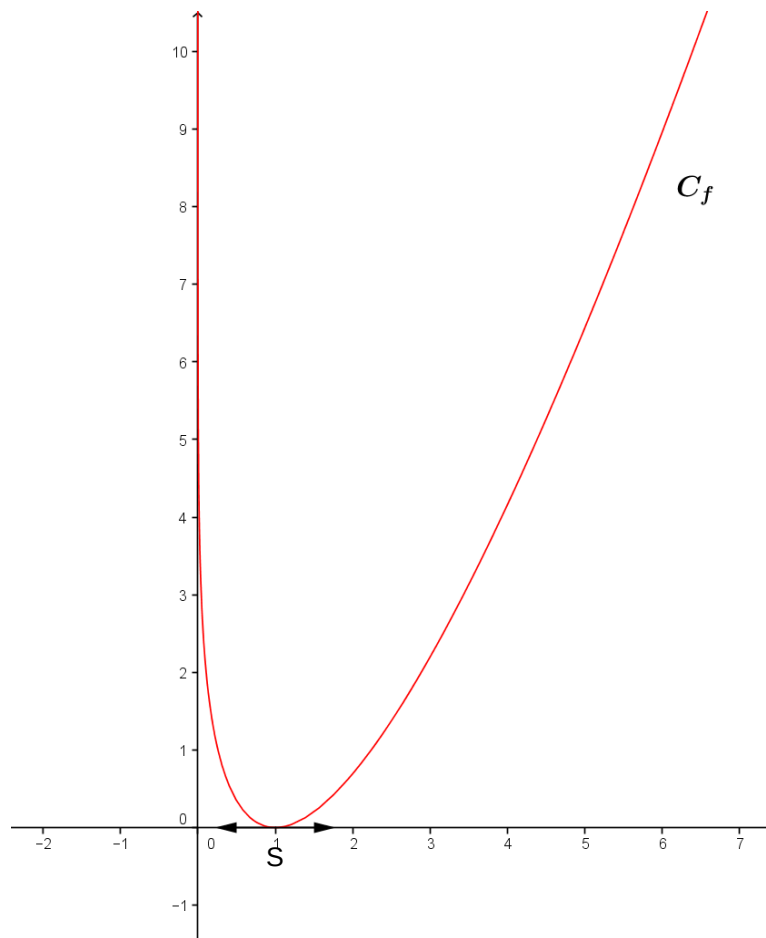
c) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$

$$f'(x) = \ln x + (x - 1) \times \frac{1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x} = \ln x - \left(\frac{1}{x} - 1\right) = \ln x - u(x)$$

d) Signe de $f'(x)$ est celui de $\ln x - u(x)$ et $f(1) = 0$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

- 3) $(O, \vec{j})$ est une asymptote verticale à C_f .
 C_f admet en $S(1,0)$ une tangente horizontale.



$$4) \mathcal{A} = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e (x-1) \ln x dx \quad u. a$$

$$\begin{aligned} \text{On pose } u(x) &= \ln x, & u'(x) &= \frac{1}{x} \\ v'(x) &= x-1, & v(x) &= \frac{1}{2}x^2 - x \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) dx = \frac{1}{2}e^2 - e - \left[\frac{1}{4}x^2 - x \right]_1^e = \frac{1}{2}e^2 - e - \left(\frac{1}{4}e^2 - e - \frac{1}{4} + 1 \right) \\ &= \frac{e^2 - 3}{4} \quad u. a \end{aligned}$$

Exercice 4 :

1) (E): $2x - 3y = 1$

a) Si (x, y) est une solution de (E) alors $2x - 3y = 1$ alors d'après le théorème de Bézout $x \wedge y = 1$ d'où x et y sont premiers entre eux.

b) $2 \times (-1) - 3 \times (-1) = -2 + 3 = 1$ donc $(-1, -1)$ est une solution de (E).

c) $2x - 3y = 1$

$$2 \times (-1) - 3 \times (-1) = 1$$

$$\text{Donc } 2(x+1) - 3(y+1) = 0 \Leftrightarrow 2(x+1) = 3(y+1) \text{ donc } 2 \text{ divise } 3(y+1)$$

comme 2 et 3 sont premiers entre eux alors 2 divise $y+1$ alors $y+1 = 2k, k \in \mathbb{Z}$

$$\text{donc } y = -1 + 2k$$

Remplaçons la valeur de $y+1$ par $2k$ dans $2(x+1) = 3(y+1)$ on obtient $2(x+1) = 3 \times 2k$

$$\text{alors } x+1 = 3k \text{ alors } x = -1 + 3k$$

Réciproquement : si $(x, y) = (-1 + 3k, -1 + 2k), k \in \mathbb{Z}$, alors

$$2x - 3y = 2(-1 + 3k) - 3(-1 + 2k) = 1$$

$$\text{Ainsi } S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(-1 + 3k, -1 + 2k), k \in \mathbb{Z}\}$$

2) a) $\det(A) = 2(m-2) - 3(n-1) = 2m - 4 - 3n + 3 = 2m - 3n - 1$

b) A n'est pas inversible $\Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow 2m - 3n - 1 = 0 \Leftrightarrow 2m - 3n = 1 \Leftrightarrow (m, n)$ est solution de (E) $\Leftrightarrow (m, n) \in \{(-1 + 3k, -1 + 2k), k \in \mathbb{Z}\}$

c) $2011 \equiv 1[3]$ et $13 \equiv 1[3]$ donc $13^{2013} \equiv 1[3]$ et par suite $2011 \times 13^{2013} \equiv 1[3]$

$$2015 \equiv 2[3] \text{ et } 11 \equiv -1[3] \text{ donc } 11^{2012} \equiv (-1)^{2012}[3] \equiv 1[3] \text{ et par suite}$$

$$2015 \times 11^{2012} \equiv 1[3]$$

d) On pose $m = 2011 \times 13^{2013} + 2$ et $n = 2015 \times 11^{2012} + 1$ alors $m \equiv 0[3]$ et $n \equiv 0[3]$ donc m et n sont multiples de 3 donc m et n ne sont pas premiers entre eux donc d'après 1) a) (m, n) ne peut pas être solution de (E)

$$\text{Or } 2011 \times 13^{2013} = m - 2 \text{ et } 2015 \times 11^{2012} = n - 1 \text{ donc } \det(B) = \det(A) \neq 0$$

d'où B est inversible