REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◈◈◈ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2013**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : **3 H** Coefficient : **3**
Section : **Sciences expérimentales**	**SESSION PRINCIPALE**

Le sujet comporte 4 pages. La page 4 / 4 est à rendre avec la copie.

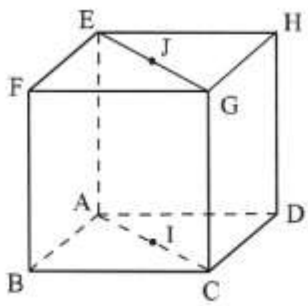
Exercice 1 (3 points)

Dans la figure ci - contre, ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

Le point I est le milieu du segment $[AC]$.

Le point J est le milieu du segment $[EG]$.

L'espace est muni du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



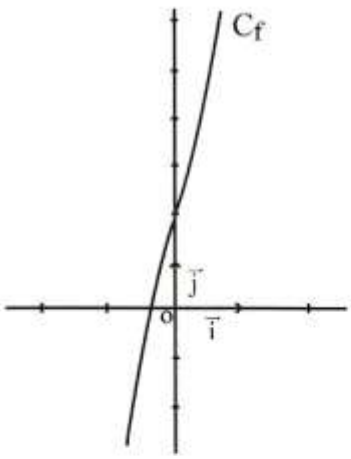
Répondre par vrai ou faux à chacune des propositions suivantes en justifiant la réponse.

1) $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE}$.

2) $\left(\overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{IG}\right).\overrightarrow{IJ} = 0$.

3) La sphère de diamètre $[AC]$ est tangente au plan d'équation $z - 1 = 0$.

Exercice 2 (6 points)



I. Dans la figure ci - contre, on a représenté dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C_f de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 6x + 2$.

1) Justifier que l'équation $x^3 + 6x + 2 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α.

2) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

II. On se propose dans cette partie de déterminer la valeur exacte de α.

1) On considère dans $\mathbb{C}$ les équations $(E_1): z^3 = 2$ et $(E_2): z^3 = -4$.

a) Justifier que les solutions de (E_1) sont $a_1 = \sqrt[3]{2}$, $a_2 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $a_3 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\left(\frac{-2\pi}{3}\right)}$.

b) Justifier que les solutions de (E_2) sont $b_1 = -\sqrt[3]{4}$, $b_2 = \sqrt[3]{4}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b_3 = \sqrt[3]{4}\, e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$.

c) Vérifier que $a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3 = -2$.

2) Soit a et b deux nombres complexes vérifiant $a^3 + b^3 = -2$ et $ab = -2$.

a) Vérifier que $(a+b)^3 = -2 - 6(a+b)$.

b) En déduire que $a+b$ est une solution de l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0$.

3) Déduire les solutions de l'équation $z^3 + 6z + 2 = 0$.

4) Conclure.

Exercice 3 (5 points)

Une étude a été faite sur une population de 22 mouches se reproduisant assez rapidement.

Le tableau suivant donne le nombre N de mouches après un temps T exprimé en jours.

T	0	9	12	18	25	33	39	48	57	66	69	75
N	22	39	105	225	499	791	938	1005	1028	1033	1034	1034

1) Quelle conjecture peut - on émettre sur le nombre de mouches au bout de 85 jours ?

2) On pose $M = \ln\left(\frac{1035}{N} - 1\right)$.

Les valeurs de M, arrondies à 10^{-3} près, sont données dans le tableau suivant :

T	0	9	12	18	25	33	39	48	57	66	69	75
M	3.830	3.240	2.181	1.281	0.072	-1.176	-2.269	-3.512	-4.989	-6.247	-6.941	-6.941

a) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire entre T et M.

b) Donner une équation de la droite de regression de M en T. (les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près).

3) a) Montrer que $N = \dfrac{1035}{1+e^{M}}$.

b) Déduire que $N = \dfrac{1035}{1+\alpha\, e^{-\beta T}}$, où α et β sont deux réels positifs que l'on déterminera.

4) En utilisant la question 3) b), valider ou réfuter la conjecture émise en 1).

Exercice 4 (6 points)

Dans l'annexe ci-jointe $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé et C_f est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[3, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 9}\right)$.

Soit E la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équations $x = 3$, $x = 5$ et $y = \ln 3$. On désigne par A l'aire (en unité d'aire) de E.

1) Hachurer E.

2) a) Vérifier que $f(5) = 2\ln 3$.

b) Soit M et N les points de la courbe C_f d'abscisses respectives 3 et 5 et P et Q les points de coordonnées respectives $(5, \ln 3)$ et $(3, 2\ln 3)$.

Placer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points M, N, P et Q.

c) Calculer l'aire du rectangle MPNQ et l'aire du triangle MPN.

d) En déduire que $\ln 3 \leq A \leq 2\ln 3$.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) En utilisant le graphique, justifier que f réalise une bijection de $[3, +\infty[$ sur l'intervalle $[\ln 3, +\infty[$.

4) Soit g la fonction réciproque de la fonction f et C_g sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Tracer la courbe C_g.

5) Soit E' la partie du plan limitée par la courbe C_g et les droites d'équations $x = \ln 3$, $x = 2\ln 3$ et $y = 5$. On désigne par A' l'aire (en unité d'aire) de E'.

a) Hachurer E'.

b) Montrer que $A' = 5\ln 3 - \int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)\,dx$.

6) a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[\ln 3, +\infty[$, $g(x) = \dfrac{e^{x} + 9e^{-x}}{2}$.

b) Calculer $\int_{\ln 3}^{2\ln 3} g(x)\,dx$ et en déduire la valeur de A.