Exercice n°1

1)	2)	3)	4)
a	b	c	c

Exercice n°2

1) a) det A $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 1 + 8 = 6 \neq 0$

Donc A est inversible.

b) On a . $\frac{1}{6}$B.A $= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

On a A est inversible et $\frac{1}{6}$B.A = I_3 donc $A^{-1} = \frac{1}{6}B = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

2) a- $F(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} F(1) = 0 \\ F(-1) = 0 \\ F(2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a + b + c = 0 \\ -1 + a - b + c = 0 \\ 8 + 4a + 2b + c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -1 \\ a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2 \end{cases}$$

ainsi a , b et c , s'ils existent, sont solutions du système (S) : $\begin{cases} a + b + c = -1 \\ a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2 \end{cases}$

b) (S) : $\begin{cases} a + b + c = -1 \\ a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2 \end{cases}$

Une écriture matricielle du système (S) est :

$A \times X = M$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) (S) $\Leftrightarrow A \times X = M \Leftrightarrow X = A^{-1} \times M$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1}M = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'où $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1 \\ -4/3 \end{pmatrix}$.

Conclusion : $F(x) = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - x - \frac{4}{3}$

Exercice n°3

1) $4a + 7b = 400$.

2) (E) : $4x + 7y = 400$.

On a $4\times100 + 7\times0 = 400$ alors le couple $(100;0)$ est une solution particulière de (E).

Par suite $4x + 7y = 4\times100 + 7\times0$ signifie $4(x - 100) = -7y$ ainsi 7 divise $4(x - 100)$

or $7 \wedge 4 = 1$ alors 7 divise $(x - 100)$ et par suite $x = 7k + 100$ où $k \in \mathbb{Z}$ et comme

$4(x - 100) = -7y$ on a $4(7k) = -7y$ d'où $y = -4k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le couple $(7k + 100 , -4k)$ vérifie l'équation (E)

en effet $4(7k + 100) + 7(-4k) = 28k + 400 - 28k = 400$

Conclusion : $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{ (7k + 100, -4k) ;\ k \in \mathbb{Z} \}$.

3) D'après 1) on a : $4a + 7b = 400$ donc $a = 7k + 100$ et $b = -4k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

D'autre part : $68 \leq a + b \leq 72$

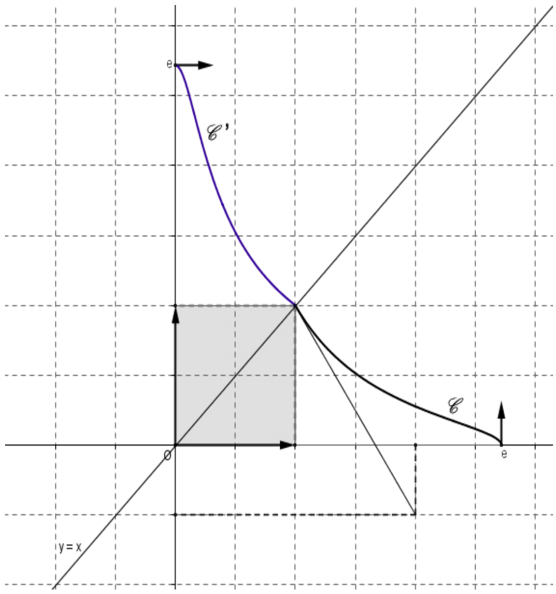
signifie $\begin{cases} 68 \leq 3k + 100 \leq 72 \\ k \in ¢ \end{cases}$ signifie $\begin{cases} \frac{-32}{3} \leq k \leq \frac{-28}{3} \\ k \in ¢ \end{cases}$ d'où $k = -10$.

Conclusion : $a = 30$ et $b = 40$.

Exercice n°4

1) a) On a : $f(1) = 1$et $f(e) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to e^-} \frac{f(x)}{x-e} = \lim\limits_{x\to e^-} \frac{f(x)-f(e)}{x-e} = -\infty$ (C admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse e)



c) $f'_d(1)$ est la pente de la droite qui porte la demi-tangente à C au point d'abscisse 1

$f'_d(1) = \frac{-0,5-1}{2-1} = -1,5 = -\frac{3}{2}$

d)f est strictement décroissante sur $I = [1\ ,\ e]$

2) a) f est définie et strictement décroissante sur $[1\ ,\ e]$ donc elle réalise une bijection de $I = [1\ ,\ e]$ sur $f([1\ ,\ e])$, de plus f est continue sur l'intervalle I donc $f([1\ ,\ e]) = [f(e)\ ,\ f(1)] = [0\ ,\ 1] = J$

b) C et C' sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3) a) La fonction $x \mapsto 1 - \ln x$ est dérivable et strictement

positive sur $[1\ ,\ e[$ donc $x \to \sqrt{1-\ln x}$ est dérivable sur $[1\ ,\ e[$ et par suite la fonction

$x \to F(x) = -\frac{2}{3}\ (1-\ln x)\sqrt{1-\ln x}$ dérivable sur $[1\ ,\ e[$ et pour tout x de $[1\ ,\ e[$ on a :

$$F'(x) = -\frac{2}{3}\left[-\frac{1}{x}\sqrt{1-\ln x} + (1-\ln x)\frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{1-\ln x}}\right] = -\frac{2}{3}\left[-\frac{1}{x}\sqrt{1-\ln x} - \frac{1}{2x}\sqrt{1-\ln x}\right] = -\frac{2}{3}\left[-\frac{3}{2}\frac{\sqrt{1-\ln x}}{x}\right] = f(x)$$

Dérivabilité de F à gauche en e :

$$\lim_{x \to e^-} \frac{F(x)-F(e)}{x-e} = \lim_{x \to e^-} \frac{2}{3}\sqrt{1-\ln x}.\frac{\ln x - 1}{x-e} = 0.\frac{1}{e} = 0 = f(e)$$

D'où F est dérivable sur $[1\ ,\ e]$ et on a $F'(x) = f(x)$ et par suite F est une primitive de f sur $[1\ ,\ e]$.

b) $A_1 = \left[\int_1^e f(x)\,dx\right] \times 9\ cm^2 = [F(x)]_1^e \times 9\ cm^2 = [F(e)-F(1)] \times 9\ cm^2 = \frac{2}{3} \times 9\ cm^2 = 6\ cm^2$

c) A = 2 A_1 + a où a est l'aire du carré de coté 1 et par suite A = 2 A_1 + 9 = 21 cm^2