EXERCICE 1 :

1) **Vrai** 2) **Vrai** 3) **Faux** 4) **Vrai** 5) **Vrai** 6) **Faux** 7) **Faux** 8) **Vrai**

EXERCICE 2 :

1) a) $\begin{cases} U_0 = 40 \\ U_{n+1} = 0,75\ U_n + 30 \end{cases}$; pour tout $n \in IN$

On a , $U_0 = 40 \leq 120$

Supposons que pour $n \in IN$, $U_n \leq 120$ et montrons que , $U_{n+1} \leq 120$

On a $U_n \leq 120 \Leftrightarrow 0,75U_n \leq 120 \times 0,75 \Leftrightarrow 0,75U_n + 30 \leq 90 + 30$ ainsi $U_{n+1} \leq 120$

D'où pour tout $n \in IN$, $U_n \leq 120$

b) $U_{n+1} - U_n = 0,75\ U_n + 30 - U_n = 30 - 0,25U_n$ or $U_n \leq 120$ donc $0.25U_n \leq 30$ d'où $30 - 0,25U_n \geq 0$ et par suite (Un) est croissante.

c) (Un) est croissante et majorée donc elle est convergente vers une limite ℓ avec $\ell = 0,75\ \ell + 30 \Leftrightarrow 0,25\ell = 30$

D'où $\ell = 120$

2) a) $V_n = U_n - 120$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 120}{U_n - 120} = \frac{0,75\ U_n + 30 - 120}{U_n - 120} = \frac{0,75\ U_n - 90}{U_n - 120} = \frac{0,75(U_n - 120)}{U_n - 120} = 0,75$$

Ainsi (Vn) est une suite géométrique de raison q = 0,75 et de premier terme $V_0 = U_0 - 120 = 40 - 120 = -80$

b) $V_n = V_0 q^n = -80 \times (0,75)^n$

c) $V_n = U_n - 120 \Leftrightarrow U_n = 120 + V_n = 120 - 80 \times (0,75)^n$ d'où $U_n = 120 - 80 \times (0,75)^n$

3) le nombre d'abonnés en 2011 est $40 = U_0$

Soit Un le nombre d'abonnés à l'année n et Un+1 dans l'année (n+1) donc $U_{n+1} = 0,75\ U_n + 30$ (la suite de 1))

Donc d'après 2) c) $U_n = 120 - 80 \times (0,75)^n$

$$120 - 80 \times (0,75)^n > 100 \Leftrightarrow -80 \times (0,75)^n > -20 \Leftrightarrow (0,75)^n < 0,25 \Leftrightarrow n\ \ln(0,75) < \ln(0,25)$$

D'où $n > \dfrac{\ln(0,25)}{\ln(0,75)}$ or $\dfrac{\ln(0,25)}{\ln(0,75)} \approx 4,82$ donc après 5 ans.

EXERCICE 3 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & a \end{pmatrix}$

1) $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2-2a \\ 0 & 8+3a \end{pmatrix} = 11I_2$

Donc $\begin{pmatrix} 11 & 2-2a \\ 0 & 8+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$ et par suite $\begin{cases} 2-2a = 0 \\ 8+3a = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ 3a = 3 \end{cases}$ d'où $a = 1$

2) a) $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \times X = M$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \end{pmatrix}$

b) $\det A = 3 - 8 = -5 \neq 0$ donc A est inversible et d'après 1) pour a =1 $A \times B = 11I_2$ donc $A^{-1} = \frac{1}{11}B$

$A \times X = M \Leftrightarrow X = A^{-1} \times M = \frac{1}{11}B \times M$ D'où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 11 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$S_{IR^2} = \{(1\ ,\ 3)\}$

3) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x+2y-z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=6-x-y \\ 2x-y+6-x-y=1 \\ 3x+2y-(6-x-y)=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=6-x-y \\ x-2y=1-6 \\ 3x+2y-6+x+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=6-x-y \\ x-2y=-5 \\ 4x+3y=13 \end{cases}$

4) $(S'') \begin{cases} z=6-x-y \\ x-2y=-5 \\ 4x+3y=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=6-x-y \\ (S) \end{cases}$ or d'après 2) les solutions de (S) sont $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

Donc $(S'') \Leftrightarrow \begin{cases} z=6-x-y \\ x=1 \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=6-1-3 \\ x=1 \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2 \\ x=1 \\ y=3 \end{cases}$ d'où $S_{IR^3}=\{(1\,,3\,,2)\}$

EXERCICE 4 :

1)

	Atelier A_1	Atelier A_2	Total
Nombre de pièces défectueuses	50	$200-50=150$	200
Nombre de pièces non défectueuses	$8000-50=7950$	$12000-150=11850$	$20000-200=19800$
Total	$20000-12000=8000$	$\frac{60}{100}\times 20000=12000$	20000

2) A : « la pièce prélevée provient de l'atelier A_1 »
D : « la pièce prélevée est défectueuse »

a) $p(D)=p(D\cap A)+p(D\cap\overline{A})=\frac{1}{50}+\frac{1}{150}=\frac{4}{150}=\frac{2}{75}\approx 0{,}0267$

b) $p(D/A)=\frac{p(D\cap A)}{p(A)}=\frac{50}{8000}=\frac{1}{160}=0{,}00625$

c) $p(D/\overline{A})=\frac{p(D\cap\overline{A})}{p(\overline{A})}=\frac{150}{12000}=\frac{1}{80}$

d) $p(\overline{A}/D)=\frac{p(D\cap\overline{A})}{p(D)}=\frac{\frac{150}{12000}}{\frac{2}{75}}=\frac{150}{12000}\times\frac{75}{2}=\frac{11250}{24000}=0{,}46875$

3) Pour une pièce il y a deux issues contraires soit elle est défectueuse de probabilité $p(D)=\frac{2}{75}$ ou non défectueuse de probabilité $p(\overline{D})=1-\frac{2}{75}=\frac{73}{75}$.

Le client achète un lot de 10 pièces. Soit p la probabilité que le lot ne contienne aucune pièce défectueuse.

$p=\left(p(\overline{D})\right)^{10}=\left(\frac{73}{75}\right)^{10}$