

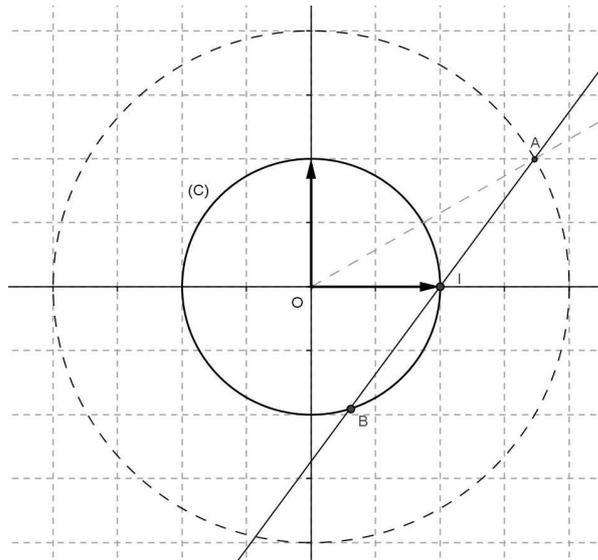
EXERCICE 1 :

- 1) **b** 2) **b** 3) **c** 4) **b**

EXERCICE 2 :

1) a) $a = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

b)



2) a) $b = \frac{a-1}{1-\bar{a}}$

$$b\bar{b} = \left(\frac{a-1}{1-\bar{a}}\right) \times \overline{\left(\frac{a-1}{1-\bar{a}}\right)} = \left(\frac{a-1}{1-\bar{a}}\right) \times \left(\frac{\bar{a}-1}{1-a}\right) = \left(\frac{a-1}{1-\bar{a}}\right) \times \left(\frac{\bar{a}-1}{1-\bar{a}}\right) = (-1) \times (-1) = 1$$

$b\bar{b} = 1 \Leftrightarrow |b|^2 = 1 \Leftrightarrow |b| = 1 \Leftrightarrow OB = 1$ donc B est un point de (C).

b) $\left(\frac{b-1}{a-1}\right) \times \overline{\left(\frac{b-1}{a-1}\right)} = \left(\frac{b-1}{a-1}\right) \times \left(\frac{\bar{b}-1}{\bar{a}-1}\right) = \frac{b\bar{b} - b - \bar{b} + 1}{a\bar{a} - a - \bar{a} + 1} = \frac{2 - (b + \bar{b})}{5 - (a + \bar{a})}$ or $a + \bar{a} = 2 \operatorname{Ré}(a)$ et $b + \bar{b} = 2 \operatorname{Ré}(b)$

Ainsi $\frac{b-1}{a-1}$ est un réel.

$$\frac{b-1}{a-1} = \frac{z_B - z_I}{z_A - z_I} = \frac{z_{\bar{B}}}{z_{\bar{A}}} \in \mathbb{R} \text{ donc } \bar{B} \text{ et } \bar{A} \text{ sont colinéaires et par suite I, A et B sont alignés.}$$

ou encore $\overline{\left(\frac{b-1}{a-1}\right)} = \frac{\bar{b}-1}{\bar{a}-1} = \frac{\frac{1}{b}-1}{\frac{1}{a}-1} = \frac{1-b}{a-1} = (1-b) \times \left(\frac{1}{b \times (a-1)}\right) = (1-b) \left(\frac{1-\bar{a}}{a-1} \times \frac{1}{a-1}\right) = \frac{b-1}{a-1}$

Ainsi $\frac{b-1}{a-1}$ est un réel.

c) $B \in (C) \cap (AI)$

3) $b = \frac{a-1}{1-\bar{a}} = \frac{(a-1)(1-a)}{|1-a|^2} = -\frac{(1-a)^2}{|1-a|^2} = -\frac{1+a^2-2a}{|1-a|^2} = -\frac{3+2i\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2i}{5-2\sqrt{3}}$

D'où $b = \frac{-3+2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}} + i\frac{-2\sqrt{3}+2}{5-2\sqrt{3}}$ or b d'argument θ et $|b| = 1$ donc $b = \cos\theta + i\sin\theta$

D'où $\cos\theta = \frac{-3+2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta = \frac{-2\sqrt{3}+2}{5-2\sqrt{3}}$

EXERCICE 3 :

I) 1) la probabilité de l'événement O : un tunisien ait un sang du groupe O, $p(O) = 0,46$.

2) a) soit p_1 la probabilité qu'un seul parmi les quatre ait un sang du groupe O.

$$p_1 = C_4^1 p(O) (1-p(O))^3 = 4 \times 0,46 \times (0,54)^3 = 0,29$$

b) soit p_2 la probabilité de trouver les quatre groupes sanguins chez les donneurs.

$$p_2 = 4! \times 0,31 \times 0,18 \times 0,05 \times 0,46 = 0,03$$

II) 1) Soit R l'événement : le sang est de Rhésus négatif.

La probabilité qu'un tunisien soit un donneur universel est $p = p(O \cap R) = p(R/O) \times p(O) = 0,09 \times 0,46 = 0,0414$

2) X suit une loi binomiale de paramètre (n, p) avec $p = 0,0414$ et n le nombre de donneurs.

a) La loi de probabilité de X est donné par : $p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

$$= C_n^k (0,0414)^k (0,9586)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

b) $E(X) = np = 0,0414 \times n$

c) Le nombre moyen des donneurs universels pour $n = 5000$ est $E(X) = 0,0414 \times 5000 = 207$

EXERCICE 4 :

1) (E) : $y' + (0,115)y = 0 \Leftrightarrow y' = -(0,115)y$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions définies sur \mathbf{R} par $f : x \mapsto ke^{-0,115x}$, où k est un réel quelconque.

2) a) Q est une solution de (E) vérifiant $Q(0) = 1,4$ ainsi $Q(t) = ke^{-0,115t}$ donc $k = 1,4$

D'où $Q(t) = 1,4e^{-0,115t}$, $t \geq 0$

b) Q est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $Q'(t) = 1,4 \times (-0,115)e^{-0,115t}$, $t \geq 0$
 $= -0,161e^{-0,115t}$, $t \geq 0$

Donc Q est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

c) $Q(t) = 0,7 \Leftrightarrow 1,4e^{-0,115t} = 0,7 \Leftrightarrow e^{-0,115t} = 0,5 \Leftrightarrow -0,115t = \ln(0,5)$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,5)}{-0,115}$$

D'où $t \approx 6h$

3) Q est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et $Q(0) = 1,4$ et comme $Q(t) = 0,7$ pour $t = 6$ donc après 6h la quantité présente dans le sang est inférieure à 0,7 ce qui explique l'injection de 0,7 mg de ce médicament chaque 6h.

EXERCICE 5 :

1) a) $f(0) = f(\alpha) = 0$

$f(x) > 0$ si $0 < x < \alpha$

$f(x) < 0$ si $\alpha < x$

b) $f(\alpha) = 0$ donc $\alpha^2 + \alpha \ln \alpha + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha = -\alpha^2 - \alpha$ et $\alpha \neq 0$ d'où $\ln \alpha = \frac{-\alpha^2 - \alpha}{\alpha}$ ainsi $\ln \alpha = -\alpha - 1 = -(\alpha + 1)$

2) g la fonction définie sur $[\alpha, +\infty[$ par $g(x) = \frac{x \ln x}{x+1} + 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x+1} + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} \ln x + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+1} + \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{x} = 0$$

3) a) g est dérivable sur $[\alpha, +\infty[$ et

$$g(x) = \frac{(\ln x + 1)(x + 1) - x \ln x}{(x + 1)^2} = \frac{x \ln x + \ln x + x + 1 - x \ln x}{(x + 1)^2} = \frac{1}{x} \times \frac{x \ln x + x^2 + x}{(x + 1)^2} = \frac{1}{x} \times (-f(x))$$

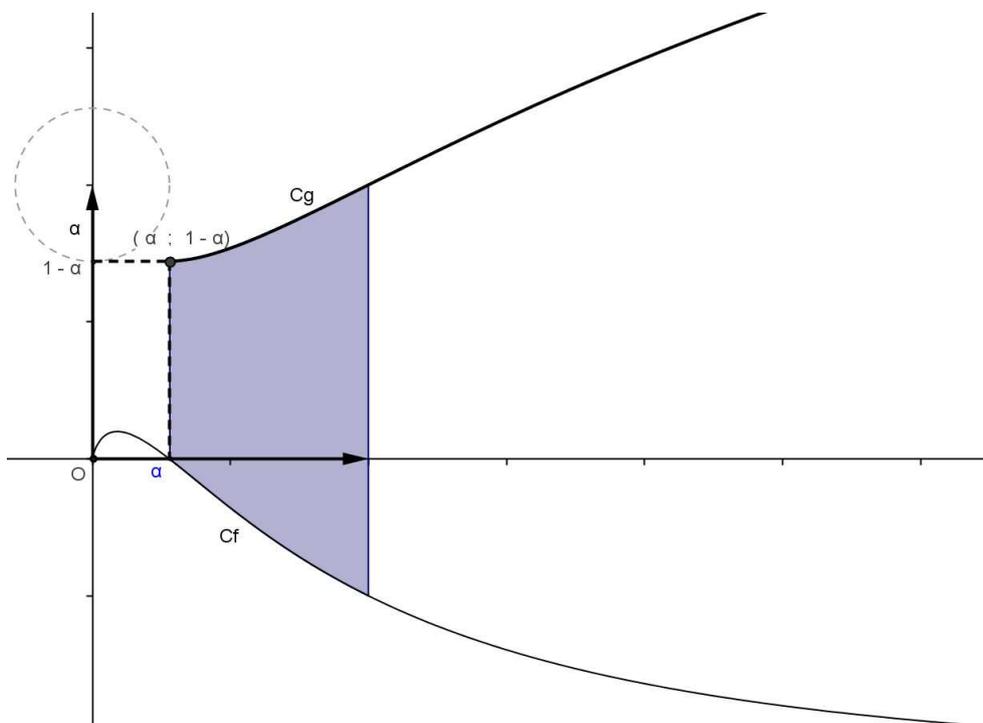
D'où $g(x) = -\frac{f(x)}{x}$

b) le signe de g' est celui de $(-f)$

x	α	$+\infty$
$g'(x)$	0	+
$g(x)$	$g(\alpha)$	$+\infty$

4) a) $g(\alpha) = \frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha + 1} + 1 = \frac{\alpha \times (-(\alpha + 1))}{\alpha + 1} + 1 = -\alpha + 1 = 1 - \alpha$

b) et c)



5) a) $\int_{\alpha}^1 f(x) dx = -\int_{\alpha}^1 x g'(x) dx$

On pose : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = g'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = g(x) \end{cases}$

D'après le formule d'intégration par parties.

$$\int_{\alpha}^1 f(x) dx = -\int_{\alpha}^1 x g'(x) dx = -\left([xg(x)]_{\alpha}^1 - \int_{\alpha}^1 g(x) dx \right) = -[xg(x)]_{\alpha}^1 + \int_{\alpha}^1 g(x) dx$$

b) $\mathbf{A} = \int_{\alpha}^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_{\alpha}^1 g(x) - f(x) dx$ or $\int_{\alpha}^1 f(x) dx = -[xg(x)]_{\alpha}^1 + \int_{\alpha}^1 g(x) dx \Leftrightarrow \int_{\alpha}^1 g(x) dx - \int_{\alpha}^1 f(x) dx = [xg(x)]_{\alpha}^1$

d'où $\mathbf{A} = \int_{\alpha}^1 g(x) - f(x) dx = [xg(x)]_{\alpha}^1 = g(1) - \alpha g(\alpha) = 1 - \alpha(1 - \alpha) = 1 - \alpha + \alpha^2$ ainsi $\mathbf{A} = \alpha^2 - \alpha + 1$ u.a