EXERCICE 1 :

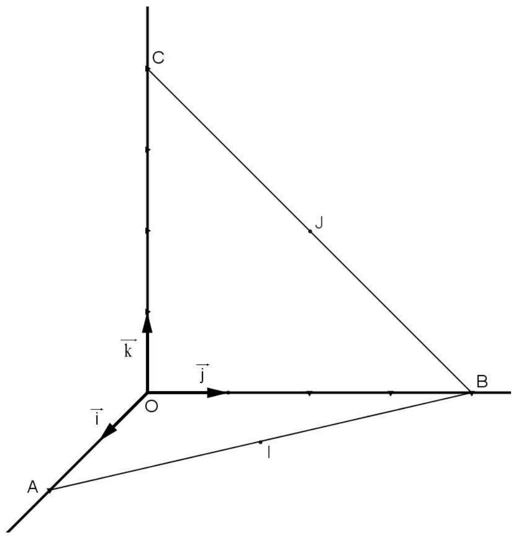
1) Faux en effet $\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^5 = 4\sqrt{2}e^{i\pi} = -4\sqrt{2}$

2) Faux en effet , $z_A = \cos\theta + i\ \sin\theta$; θ étant l'argument de z_A $\sin\theta = \frac{1}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{6}$ ainsi

$z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

2) Vrai en effet l'affixe du milieu du segment [MN] est $\frac{z_M + z_N}{2} = \frac{-\frac{-5}{4}}{2} = \frac{5}{8}$

EXERCICE 2 :



1) $I\left(\frac{2+0}{2}, \quad \frac{0+4}{2}, \quad \frac{0+0}{2}\right)$ d'où $I(1, \quad 2, \quad 0)$

$J\left(\frac{0+0}{2}, \quad \frac{4+0}{2}, \quad \frac{0+4}{2}\right)$ d'où $J(0, \quad 2, \quad 2)$

2) a) $P = \{M, \text{ tel que } MI = MJ\}$

$$M(x,y,z) \in P \Leftrightarrow MI = MJ \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + (2-y)^2 + z^2} = \sqrt{(-x)^2 + (2-y)^2 + (2-z)^2}$$
$$\Leftrightarrow (1-x)^2 + (2-y)^2 + z^2 = x^2 + (2-y)^2 + (2-z)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + +z^2 = x^2 + 4 - 4z + z^2$$
$$\Leftrightarrow 2x - 4z + 3 = 0$$

D'où P est le plan d'équation $2x - 4z + 3 = 0$

Autrement : $P = \{M, \text{ tel que } MI = MJ\}$ donc P est le plan médiateur du segment [IJ].

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

Donc $P:-x+2z+c=0$, P passe par le milieu de [IJ] de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ,\ 2\ ,\ 1\right)$

Ainsi $-\frac{1}{2}+4+c=0$ d'où $c=-\frac{3}{2}$

Et par suite $P:-x+2z-\frac{3}{2}=0$ d'où $P:2x-4z+3=0$

b) $(OC):\begin{cases}x=0\\y=0\\z=4\alpha\end{cases}\ \alpha\in IR$ et $P:2x-4z+3=0$

$$(OC)\cap P:\begin{cases}x=0\\y=0\\z=4\alpha\\2x-4z+3=0\end{cases}\ \alpha\in IR \Leftrightarrow (OC)\cap P:\begin{cases}x=0\\y=0\\z=4\alpha\\-16\alpha+3=0\end{cases}\ \alpha\in IR \Leftrightarrow (OC)\cap P:\begin{cases}x=0\\y=0\\z=4\alpha\\\alpha=\frac{3}{16}\end{cases}\ \alpha\in IR$$

D'où (OC) et P sont sécants en un point $K\left(0\ ,\ 0\ ,\ \frac{3}{4}\right)$

3) S l'ensemble des points M(x , y , z) de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-\frac{3}{2}z-5=0$

a) $M(x,y,z)\in S \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-\frac{3}{2}z-5=0$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+\left(z-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3}{4}-5=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+\left(z-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{23}{4}$$

D'où S est la sphère de centre $K\left(0\ ,\ 0\ ,\ \frac{3}{4}\right)$ et d rayon $R=\sqrt{\frac{23}{4}}=\frac{\sqrt{23}}{2}$

b) $I(1\ ,\ \ 2\ ,\ \ 0)$; $1^2+2^2+0^2-\frac{3}{2}\times 0-5=5-5=0$ donc $I\in S$

$J(0\ ,\ \ 2\ ,\ \ 2)$; $0^2+2^2+2^2-\frac{3}{2}\times 2-5=8-3-5=8-8=0$ donc $J\in S$

c) l'ensemble des centres des sphères qui passent par I et J est l'ensemble des points M tels que MI = MJ c'est le plan P. Comme le centre est un point de la droite (OC) donc les centres sont les points de P $\cap$ (OC) or d'après 2) b) P est (OC) sont sécantes en un point K ainsi il existe une seule sphère de centre K sur (OC) et qui passe par I et J.

4) le centre K de S est un point de P puis que KI = KJ donc l'intersection de P avec S est le grand cercle de centre $K\left(0\ ,\ 0\ ,\ \frac{3}{4}\right)$ est de rayon $R=\frac{\sqrt{23}}{2}$

EXERCICE 3 :

1)

A	14,5	13,5	12	10,8	9,9	8,9	8
T	500	1000	2000	3000	4000	5000	6300

2) a)

B = ln A	2,674	2,603	2,485	2,380	2,293	2,186	2,079
T	500	1000	2000	3000	4000	5000	6300

b) $\rho_{BT} = -0{,}998$; $|\rho_{BT}|$ est très proche de 1 donc coefficient de corrélation on peut donc procéder à un ajustement affine par les moindres carrés de la série (B , T).

c) $\Delta : T = -9756{,}68\ B + 26390{,}938$

e) pour $A = 6{,}8$ on a $B = \ln(6{,}8) = 1{,}161$ donc $T = -9756{,}68 \times 1{,}161 + 26390{,}938 = 15063{,}43252$

D'où l'année de la chute de météorite est environ (– 13063,433)

EXERCICE 4 :

1) soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \dfrac{e^x + x + 2}{e^x + 1}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + x + 2}{e^x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{1} = 1$$

Ainsi la droite d'équation y = 1 est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$

2) a) $x + 2 - \dfrac{xe^x + e^x}{e^x + 1} = \dfrac{(x+2)(e^x+1) - xe^x - e^x}{e^x + 1} = \dfrac{xe^x + x + 2e^x + 2 - xe^x - e^x}{e^x + 1} = \dfrac{e^x + x + 2}{e^x + 1} = f(x)$

b) pour tout réel x , $f(x) = x + 2 - \dfrac{xe^x + e^x}{e^x + 1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x+2) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{xe^x + e^x}{e^x + 1} = \dfrac{0}{1} = 0$ d'où la droite $\Delta : y = x + 2$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$

d) $f(x) - (x+2) = -\dfrac{xe^x + e^x}{e^x + 1} = -\dfrac{e^x(x+1)}{e^x + 1}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)-(x+2)$		+	0	−	
Position de C_f et Δ		**C_f est au dessus de Δ**	**$C_f = \Delta$**	**C_f est au dessous de Δ**	

3) f est dérivable sur IR ,

$$f'(x) = \frac{(e^x+1)(e^x+1) - e^x(e^x + x + 2)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - e^{2x} - xe^x - 2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{1 - xe^x}{(e^x+1)^2}$$

4) α est l'abscisse du point A de C_f où la tangente est horizontale donc $f'(\alpha) = 0$

a) $f'(0) = \dfrac{1 - 0\times e^0}{(e^0+1)^2} = \dfrac{1}{4} \neq 0$ donc $\alpha \neq 0$.

b) $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1 - \alpha e^\alpha}{(e^\alpha+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha e^\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha e^\alpha = 1 \Leftrightarrow e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$

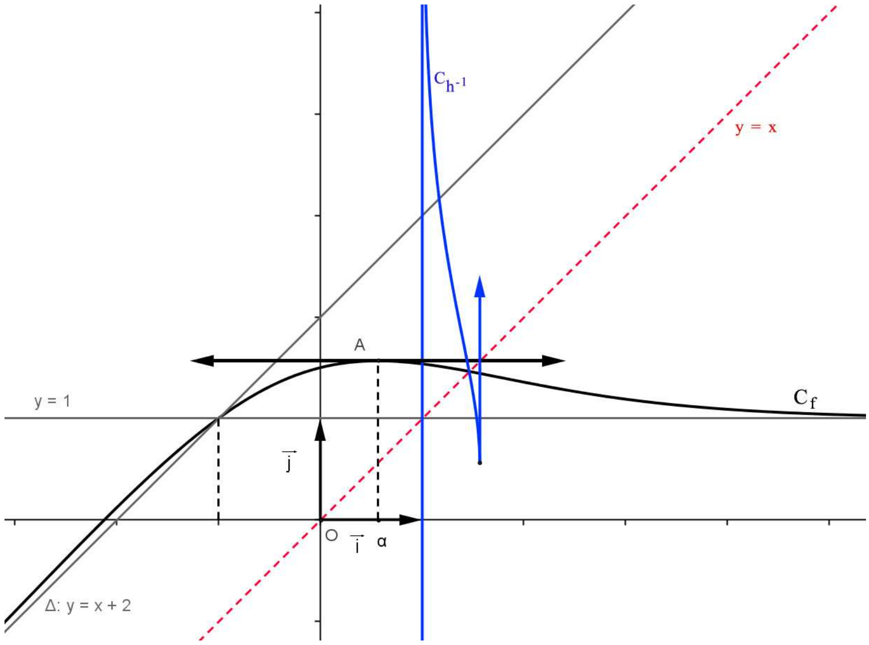
$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha + \alpha + 2}{e^\alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\alpha} + \alpha + 2}{\frac{1}{\alpha} + 1} = \frac{\frac{\alpha^2 + 2\alpha + 1}{\alpha}}{\frac{\alpha + 1}{\alpha}} = \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha + 1} = \alpha + 1$$

c) voir figure.

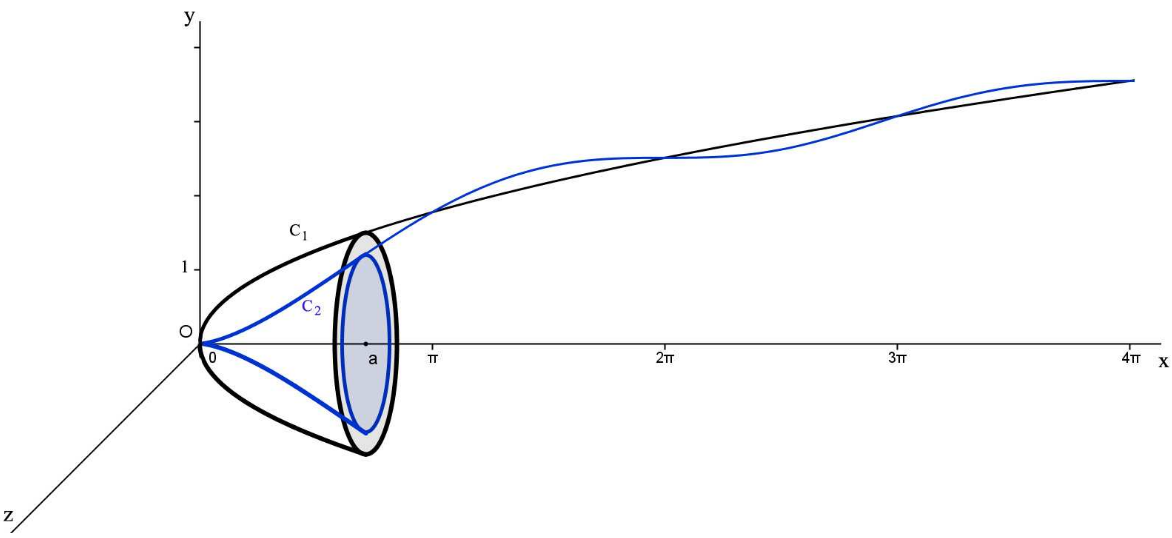
5) a) h est la restriction de f sur $[\alpha\ ,\ +\infty[$ donc h est continue est strictement décroissante sur $[\alpha\ ,\ +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[\alpha\ ,\ +\infty[$ sur

$$h\left([\alpha\ ,\ +\infty[\right) = f\left([\alpha\ ,\ +\infty[\right) = \left]\lim_{+\infty} f\ ,\ f(\alpha)\right] =]1\ ,\ \alpha+1]$$

b)



EXERCICE 5 :



Les fonctions f et g définies sur $[0\ ,\ 4\pi]$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \sqrt{x - \sin x}$

1) $V_1 = \displaystyle\int_0^a \pi\ f^2(x)\ dx = \int_0^a \pi\ x\ dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \pi\frac{a^2}{2} = \frac{\pi}{2}a^2$ u.v.

2) $V_2 = \displaystyle\int_0^a \pi\ g^2(x)\ dx = \int_0^a \pi\ (x - \sin x)\ dx = \pi\int_0^a x\ dx\ - \pi\int_0^a \sin x\ dx = V_1 - \pi\int_0^a \sin x\ dx$

$= V_1 - \pi[-\cos x]_0^a = V_1 - \pi(-\cos a + 1) = V_1 + \pi(\cos a - 1)$ u.v.

3) a) $V_2 - V_1 = \pi(\cos a - 1)$ or pour tout a ; $\cos a \le 1$ d'où $V_2 - V_1 \le \mathbf{0}$

Ainsi pour tout $a \in]0\ ,\ 4\pi]$ $V_2 \le V_1$

b) $V_2 = V_1 \Leftrightarrow \pi(\cos a - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos a = 1$ et comme $a \in]0\ ,\ 4\pi]$ donc $a \in \{2\pi\ ,\ 4\pi\}$