Exercice 5 (6 points)

I] On considère la fonction f_2 définie sur $]0,+\infty[$ par $f_2(x) = x^2 - \ln x$ et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f_2(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f_2(x)$.

b) Calculer $\lim_{x\to +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Dresser le tableau de variation de f_2.

2) Dans l'annexe ci-jointe on a tracé, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (L) de la fonction ln et la courbe (C) d'équation $y = x^2$.

a) Soit $x > 0$. On considère les points M et M_2 de même abscisse x et appartenant respectivement à (L) et (C). Vérifier que $MM_2 = f_2(x)$.

b) Construire alors dans l'annexe les points de la courbe (Γ) d'abscisses respectives 2, $\frac{1}{e}$ et $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

c) Tracer la courbe (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de l'annexe.

II] 1) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_k définie sur $]0,+\infty[$ par $f_k(x) = x^k - \ln x$.

a) Déterminer f_k' la fonction dérivée de f_k.

b) Montrer que f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égal à $\frac{1+\ln k}{k}$.

c) Pour tout réel $x > 0$, on considère les points $M_k(x, x^k)$ et $M(x, \ln x)$.

Déterminer la valeur minimale de la distance MM_k.

2) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$.

a) Vérifier que $\ln u_k = -\frac{\ln k}{k}$ et en déduire la limite de (u_k).

b) Soit A(1, 0) et A_k le point de coordonnées $(u_k, f_k(u_k))$.

Calculer la limite de la distance AA_k lorsque k tend vers $+\infty$.

Annexe (à rendre avec la copie)