EXERCICE 1 : (4 POINTS)

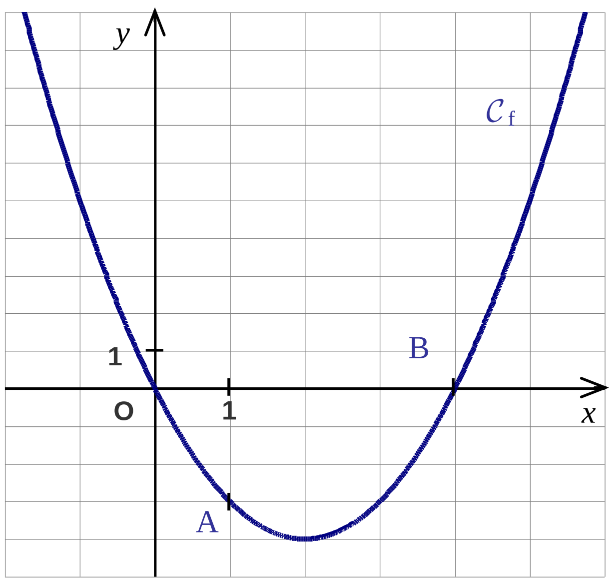
Soit ABC un triangle tel que BA = $\sqrt{2}$, BC = 2 , $BAC = \dfrac{\pi}{4}$ et $ACB = \dfrac{\pi}{6}$. On désigne par H le projeté orthogonal de B sur (AC).

Répondre par **Vrai** ou **Faux** aux propositions suivantes. Aucune justification n'est demandée.

1. $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.
2. BH = $\sqrt{2}$.
3. AC = $1+\sqrt{3}$.
4. $\sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

EXERCICE 2 : (8 POINTS)

Soit f la fonction définie par $f(x)=(x-2)^2-4$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



1. Par lecture graphique
   a) Résoudre l'équation f(x) = 0.
   b) Donner les variations de la fonction f.
2. a) Calculer $f(2)$.

   b)Prouver que pour tout réel *x*, on a : $f(x)-f(2)\geq 0$.

   Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
3. Soit A et B les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives 1 et 4.
   a) Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
   b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)\leq x-5$

EXERCICE 3 : (8 POINTS)

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(1;1)$, $B(0;\ 2)$ et La droite (D) dont une équation est $-x+y-1=0$.

1. Montrer que (D) est la médiatrice du segment [AB].
2. Soit (Γ) l'ensemble des points M(x, y) tels que $x^2+y^2-6y-1=0$.
   a) Montrer que (Γ) est le cercle dont on déterminera les coordonnées de son centre I et son rayon R.
   b) Montrer que la droite (D) coupe le cercle (Γ) en deux points E et F .
   c) Déterminer les coordonnées de E et F.

Corrigé

Exercice 1 :

1. Vrai ; 2. Faux ; 3. Vrai ; 4. Vrai

Exercice 2 :

1. a) f(x) = 0 équivaut à x = 0 ou x = 4.
   b) f est décroissante sur $]-\infty, 2]$ et croissante sur $[2, +\infty[$.

2. a) f(2) = $(2-2)^2 - 4 = -4$.
   b) Pour tout x réel , on a : $f(x) - f(2) = (x-2)^2$.
   D'autre part : $(x-2)^2 \geq 0$, il ne résulte : $f(x) - f(2) \geq 0$.
   f admet un minimum en 2 qui vaut - 4.

3. a) Le coefficient directeur de la droite (AB) est : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{f(4) - f(1)}{4-1} = \dfrac{0-(-3)}{3} = 1$.
   D'où l'équation réduite de la droite (AB) est : y = x + p où p est un réel.
   Comme A est un point de (AB) alors $y_A = x_A + p$ d'où $p = y_A - x_A = -4$.
   Donc (AB) : y = x – 4.
   b) $f(x) \leq x - 5$ équivaut à $(\mathcal{C}_f)$ est au dessous de (D) équivaut à $1 \leq x \leq 4$.

Exercice 3 :

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D) la médiatrice du segment [AB] donc (D) : -x + y + c = 0 où c est un réel. Le milieu du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ appartient à (D) donc

$-\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} + c = 0$ équivaut à $c = -1$.

Ainsi : (D) : - x + y - 1 =0.

2. a) $x^2 + y^2 - 6y - 1 = 0$ équivaut à $x^2 + (y-3)^2 - 10 = 0$ équivaut à $x^2 + (y-3)^2 = 10$.
   Donc (Γ) est le cercle de centre I(0, 3) et de rayon R = $\sqrt{10}$.
   b) $d(I, D) = \dfrac{|-0+3-1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < \sqrt{10}$ donc (D) coupe (Γ) en deux points E et F.
   c) Résolvons le système $\begin{cases} -x + y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6y - 1 = 0 \end{cases}$
   Prenons y = x + 1, il en suit :
   $x^2 + (y-3)^2 = 10$ équivaut à $x^2 + (x-2)^2 = 10$ équivaut à $2x^2 - 4x - 6 = 0$
   équivaut à $x^2 - 2x - 3 = 0$ équivaut à x = -1 ou x = 3.
   Donc $\Gamma \cap D = \{E(-1, 0), F(3, 4)\}$