Homothétie-translations

Soit I un point du plan et k un réel non nul.

Définition :

On appelle homothétie h de centre I et de rapport k , l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$.

On note : $h = h_{(I,k)}$.

Cas particuliers

$h_{(I,1)} = Id_P$ et $h_{(I,-1)} = S_I$

Propriétés

On suppose que $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ et $M \neq I$.

1. I, M et $M' = h_{(I,k)}(M)$ sont alignés.
2. I est le barycentre de (M, k) et $(M', -1)$.
3. $\overrightarrow{MI} = \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{MM'}$.
4. Une application f est une homothétie de rapport équivaut à pour touts points M et N d'images respectives M' et N' par f , $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$

Conséquences: soit h une homothétie de rapport k

1. L'image d'une droite par h est une droite qui est parallèle.
2. h conserve les mesures des angles orientés.
3. Soit A et B deux points distincts , C et D deux points distincts et k réel strictement et différent de 1.
   Si (AB) // (CD) et CD = k.AB alors il existe deux homothéties de rapports respectifs k et (-k) qui transforment [AB] en [CD].

Exercice

Soit A et B deux points distincts, on suppose que $B = h_{\left(I, \frac{3}{2}\right)}(A)$.

1. Construire I.
2. Soit C un point n'appartenant pas à la droite (AB).
   Construire $D = h_{\left(I, \frac{3}{2}\right)}(C)$.

Homothétie-translations

Solution :

1. $B=h_{\left(I,\frac{3}{2}\right)}(A)\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{1-\frac{3}{2}}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=-2\overrightarrow{AB}$. (voir figure ci dessous)
2. On a : $D=h_{\left(I,\frac{3}{2}\right)}(C)$ donc $D\in(IC)$. D'autre part , $h_{\left(I,\frac{3}{2}\right)}\left((AC)\right)$ = (BD) est la parallèle à la droite (CA) passant par $B=h_{\left(I,\frac{3}{2}\right)}(A)$.

Composition : soit k et k' deux non nuls et I et I' deux points du plans.

1. $h_{(I,k)}\circ h_{(I,k')}=h_{(I,kk')}$
2. $h_{(I,k)}$ est une bijection du plan et sa réciproque est $h^{-1}=h_{\left(I,\frac{1}{k}\right)}$.
3. Si kk' = 1 alors $h_{(I,k)}\circ h_{(J,k')}=t_{k\overrightarrow{IJ}}$.

   Si kk'≠ 1 alors $h_{(I,k)}\circ h_{(J,k')}$ est une homothétie de rapport kk' et de centre L tel que I, J et L sont alignés.
4. $t_{\overrightarrow{IJ}}\circ h_{(I,k)}=h_{(J,k)}$.

Exercice :

A, B et C étant trois points non alignés. On désigne par h_A l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{4}$, par h_B l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{4}$, et par t la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.

On note f = $t\circ h_B\circ h_A$.

1. Déterminer f(A).
2. Montrer que f est une homothétie dont on précisera le rapport et le centre.

solution :

1. Soit $A_1=h_B\circ h_A(A)=h_B(A)$ d'où $\overrightarrow{BA_1}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.

   Donc f(A) = $t(A_1)=A_2$ avec $\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{CB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{A_1C}$.

   Ainsi : $A_2=C$ donc f(A) =C.

Homothétie-translations

2. f est la composée d'une translation et de deux homothéties de même rapport $\frac{1}{4}$ donc f est une homothétie de rapport $\frac{1}{16}$.

   Soit O le centre de f , O est défini par :

   $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{16}\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC} = \frac{1}{16}\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \frac{15}{16}\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} = \frac{16}{15}\overrightarrow{AC}$.

Ecriture complexe

1. de l'homothétie h de rapport k non nul et différent de 1 est : z' = kz + b où b est un nombre complexe.
2. de l'homothétie de centre I d'affixe z_0 et de rapport k réel non nul et différent de 1 est : $z'-z_0 = k\left(z-z_0\right)$.
3. Soit k un réel no nul et différent de 1.

   z' = kz + b est l'écriture complexe de l'homothétie de centre I d'affixe $z_0 = \frac{b}{1-k}$ et de rapport k.