Congruence (3)

Exemple 1 : Montrez que pour tout entier naturel n, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

> Nous savons traiter ce type de question à l'aide du "principe de récurrence"
> Les congruences, comme nous allons le constater, offre une approche plus simple et plus générale pour ce type de problème.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$3^{n+3} - 4^{4n+2} = 3^3.3^n - 4^2.(4^4)^n$

Or $3^3 \equiv 5\ [11]$; $4^2 \equiv 6[11]$ et $4^4 \equiv 3[11]$ (et donc $(4^4)^n \equiv 3^n\ [11]$)

Alors, $3^3.3^n \equiv 5.3^n\ [11]$ et $4^2.(4^4)^n \equiv 6.3^n\ [11]$

Il vient que, $3^{n+3} - 4^{4n+2} \equiv 5.3^n + 6.3^n\ [11]$

C'est-à-dire $3^{n+3} - 4^{4n+2} \equiv 11.3^n\ [11]$

Et puisque $11.3^n \equiv 0\ [11]$, on déduit que $3^{n+3} - 4^{4n+2} \equiv 0\ [11]$

En d'autres termes, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11 pour tout entier naturel n

Exemple 2 : Montrez que pour tout entier naturel n, $6^n + 13^{n+1}$ est divisible par 7

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$13 \equiv 6\ [7]$ et donc $13^{n+1} \equiv 6^{n+1}\ [7]$

Alors $6^n + 13^{n+1} \equiv 6^n + 6^{n+1}\ [7]$

Or $6^n + 6^{n+1} = 6^n(1+6) = 7.6^n$.

Et puisque $7.6^n \equiv 0\ [7]$, on déduite que $6^n + 13^{n+1} \equiv 0\ [7]$

Autrement dit, $6^n + 13^{n+1}$ est divisible par 7 pour tout entier naturel n

Exemple 3 : Démontrez que pour tout entier naturel n, $n(n^4 - 1)$ est un multiple de 5

Soit $n \in \mathbb{N}$,

On peut raisonner en utilisant les restes possibles dans la division euclidienne de n par 5.
Pour tout entier n, on a : $n \equiv 0\ [5]$ ou $n \equiv 1\ [5]$ ou $n \equiv 2\ [5]$ ou $n \equiv 3\ [5]$ ou $n \equiv 4\ [5]$

- Si $n \equiv 0\ [5]$, alors $n^5 \equiv 0\ [5]$ et donc $n^5 - n \equiv 0\ [5]$ c'est-à-dire $n(n^4 - 1) \equiv 0\ [5]$
- Si $n \equiv 1\ [5]$, alors $n^5 \equiv 1\ [5]$ et donc $n^5 - n \equiv 0\ [5]$ c'est-à-dire $n(n^4 - 1) \equiv 0\ [5]$
- Si $n \equiv 2\ [5]$, alors $n^5 \equiv 2^5\ [5]$ et donc $n^5 - n \equiv 0\ [5]$ c'est-à-dire $n(n^4 - 1) \equiv 0\ [5]$
  Or $2^5 = 32$ et $32 \equiv 2\ [5]$
  Il vient, par transitivité que $n^5 \equiv 2\ [5]$
  $n \equiv 2\ [5]$ et $n^5 \equiv 2\ [5]$ entraine alors que $n^5 - n \equiv 0\ [5]$ c'est-à-dire $n(n^4 - 1) \equiv 0\ [5]$
- Si $n \equiv 3\ [5]$, alors …
- Si $n \equiv 4\ [5]$, alors …

On déduit en définitive que pour tout entier naturel n, $n(n^4 - 1) \equiv 0\ [5]$
En d'autres termes, pour tout entier naturel n, $n(n^4 - 1)$ est un multiple de 5

Remarque : il est courant d'illustrer le raisonnement précédent à l'aide d'un tableau où on fait figurer les restes possibles dans la division euclidienne par 5. On obtient ainsi :

	différents restes possibles dans la division euclidienne par 5				
n	0	1	2	3	4
n^5	0	1	2	3	4
$n^5 - n = n(n^4 - 1)$	0	0	0	0	0

Il résulte de ce tableau que pour tout entier naturel n, $n(n^4 - 1) \equiv 0\ [5]$

Congruence (3)

Exemple 4 :

1. Trouvez, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 8.
2. Quel est l'ensemble des entiers naturels n tels que le nombre $3^n.n - 9n + 2$ soit divisible par 8?

   (Autrement dit, résoudre dans $\mathbb{N}$ "l'équation" : $3^n.n - 9n + 2 \equiv 0$ [8])

1. Soit n $\in \mathbb{N}$, on a :
   $3^0 \equiv 1$ [8] ; $3^1 \equiv 3$ [8] ; $3^2 \equiv 1$ [8]
   Il vient alors que pour tout entier naturel k, $3^{2k} \equiv 1$ [8] et $3^{2k+1} \equiv 3$ [8]

   Les restes possibles par la division euclidienne de 3^n par 8 sont donc 1 ou 3 suivant que n soit pair ou impair.

2. Soit n $\in \mathbb{N}$, on a :
   - Si n = 2k (n est pair), alors $3^n \equiv 1$ [8] et donc $3^n.n \equiv n$ [8]
     $3^n.n - 9n + 2 \equiv n - 9n + 2$ [8]
     $3^n.n - 9n + 2 \equiv -8n + 2$ [8]
     $3^n.n - 9n + 2 \equiv 2$ [8] (car $-8n \equiv 0$ [8])

     Donc, il n'y a pas d'entier naturel pair tel que $3^n.n - 9n + 2 \equiv 0$ [8]

   - n = 2k+1 (n est impair), alors $3^n \equiv 3$ [8] et donc $3^n.n \equiv 3n$ [8]
     $3^n.n - 9n + 2 \equiv 3n - 9n + 2$ [8]
     $3^n.n - 9n + 2 \equiv -6n + 2$ [8]
     $3^n.n - 9n + 2 \equiv 2n + 2$ [8] (car $-6 \equiv 2$ [8])
     $3^n.n - 9n + 2 \equiv 2(n + 1)$ [8]

     Il vient alors que : $3^n.n - 9n + 2 \equiv 0$ [8] $\Leftrightarrow$ $2(n + 1) \equiv 0$ [8]
     On achève l'exercice en dressant un tableau des reste ossibles dans la division euclidienne ar 8

	différents restes possibles dans la division euclidienne par 8			
n	1	3	5	7
n + 1	2	4	6	0
2(n + 1)	4	0	4	0

N'oubliez pas que n est impair

Donc $3^n.n - 9n + 2 \equiv 0$ [8] $\Leftrightarrow$ $n \equiv 3$ [8] ou $n \equiv 7$ [8]

Conclusion : l'ensemble des entiers naturels n tels que le nombre $3^n.n - 9n + 2$ soit divisible par 8 est

S = {n = 8k + 3 ; n = 8k + 7 ; k $\in \mathbb{N}$}

Exemple 5 :

Déterminer le reste de la division euclidienne par 5 de : $a = 2^{3562}$, $b = (3722)^{763}$, $c = (6753)^{811}$

Pour $a = 2^{3562}$, commençons par étudier les restes de la division euclidienne de 2^n par 5.

Soit n $\in \mathbb{N}$, on a :
$2^0 \equiv 1$ [5] ; $2^1 \equiv 2$ [5] ; $2^2 \equiv 4$ [5] ; $2^3 \equiv 3$ [5] ; $2^4 \equiv 1$ [5]
Il vient alors que pour tout entier naturel k, $2^{4k} \equiv 1$ [5] ; $2^{4k+1} \equiv 2$ [5] ; $2^{4k+2} \equiv 4$ [5] ; $2^{4k+3} \equiv 3$ [5]
On a par ailleurs, $a = 2^{3562} = 2^{4x890+2}$. On déduit de ce qui précède que $\boxed{2^{3562} \equiv 4 \ [5]}$

Pour $b = (3722)^{763}$, commençons par déterminer le restes de la division euclidienne de 3722 par 5.
on a : $3722 \equiv 2$ [5]
Il vient alors que, $(3722)^{763} \equiv 2^{763}$ [5]
Et puisque $2^{763} = 2^{4x190+3}$, on déduit de ce qui précède que $2^{763} \equiv 3$ [5] et par suite $\boxed{(3722)^{763} \equiv 3 \ [5]}$

A vous de jouer pour $c = (6753)^{811}$

Congruence (3)

Exemple 6 : Déterminez l'ensemble des *x* entiers relatifs tels que : $x^2 + 3x$ soit divisible par 7

Soit $n \in \mathbb{Z}$, dressons un tableau des restes possibles dans la division euclidienne par 7

	différents restes possibles dans la division euclidienne par 5						
x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1
$3x$	0	3	6	9	5	1	4
$x^2 + 3x$	0	4	3	4	0	5	5

Il ressort que $x^2 + 3x$ est divisible par 7 si et seulement si $x \equiv 0\ [7]$ ou $x \equiv 4\ [7]$

l'ensemble des entiers x tels que le nombre $x^2 + 3x$ soit divisible par 7 est

$S = \{x = 7k\ ;\ x = 7k + 4\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$

Remarque : Nous verrons plus tard avec le chapitre sur les nombres premiers entre eux qu'il est encore plus facile de résoudre ce type d'exercice avec le théorème de Gauss.

En effet : $x^2 + 3x \equiv 0\ [7] \Leftrightarrow x(x + 3) \equiv 0\ [7]$

Et puisque 7 est premier, d'après le théorème de Gauss, il ne peut diviser un produit d'entiers que si il divise au moins un de ces entiers.

On a donc: $x \equiv 0\ [7]$ ou $x + 3 \equiv 0\ [7]$ c'est-à-dire $x \equiv 0\ [7]$ ou $x - 4 \equiv 0\ [7]$ (par ajout de -7)

D'où : $x^2 + 3x \equiv 0\ [7] \Leftrightarrow x = 7k\ ;\ x = 7k + 4\ ;\ k \in \mathbb{Z}$