Fonctions minorées (majorées)

Définition 1: fonction majorée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et M un réel fixé .
On dit que M est **un** majorant de la fonction f si pour tout x dans I, f(x)≤M.

On dit aussi que f est majorée par M sur I.

Tout réel M' supérieur à M est aussi un majorant de f.

Exemples :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=-3x^{2}+4x-1$.

Pour tout x réel ,

$$f\left(x\right)=-3x^{2}+4x-1=-3\left(x^{2}-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)=-3\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^{2}-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\right]=-3\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^{2}-\frac{1}{9}\right].$$

Comme $\left(x-\frac{2}{3}\right)^{2}\geq 0$ alors $\left(x-\frac{2}{3}\right)^{2}-\frac{1}{9}\geq -\frac{1}{9}$ donc $-3\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^{2}-\frac{1}{9}\right]\leq\frac{1}{3}$ d'où $f\left(x\right)\leq\frac{1}{3}$.

Ainsi , la fonction f est majorée par $\frac{1}{3}$.

2. Soit g la fonction définie sur $I=\left]-1,+\infty\right[$ par $g\left(x\right)=\frac{3x+2}{x+1}$.

   Pour tout x > -1, $g\left(x\right)=\frac{3x+2}{x+1}=\frac{3\left(x+1\right)-1}{x+1}=3-\frac{1}{x+1}$.

Comme $x>-1$ alors $x+1>0$ donc $\frac{1}{x+1}>0$ d'où $-\frac{1}{x+1}<0$ ce qui donne $3-\frac{1}{x+1}<3$.

Par suite , pour tout x >-1 , $f\left(x\right)<3$. Ce qui veut dire que f est majorée sur I par 3.

Définition 2: fonction minorée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et m un réel fixé .
On dit que m est **un** minorant de la fonction f si pour tout x dans I, f(x) $\geq m$.

On dit aussi que f est minorée par m sur I.

Tout réel m' inférieur à m est aussi un minorant de f.

Exemples :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=x^{2}-3x+2$.

Fonctions minorées (majorées)

Pour tout x réel , $f\left(x\right)=x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$.

Comme $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\geq 0$ alors $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{4}\geq -\frac{1}{4}$ d'où $f\left(x\right)\geq -\frac{1}{4}$.

Ainsi , la fonction f est minorée par $-\frac{1}{4}$.

2. Soit g la fonction définie sur $I=\left]1,+\infty\right[$ par $g\left(x\right)=\frac{4x-3}{x-1}$.

   Pour tout x > 1, $g\left(x\right)=\frac{4x-2}{x-1}=\frac{4\left(x-1\right)+2}{x-1}=4+\frac{2}{x-1}$.

Comme $x>1$ alors $x-1>0$ donc $\frac{1}{x-1}>0$ d'où $\frac{2}{x+1}>0$ ce qui donne $4+\frac{2}{x-1}>4$.

Par suite , pour tout x >1 , $f\left(x\right)>4$. Ce qui veut dire que f est minorée sur I par 3.

Définition 3: fonction bornée

On dit qu'une fonction f est bornée sur un intervalle I , si f est majorée et minorée sur I.

Exemples :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Pour tout x réel , $f\left(x\right)=\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{x^2+1-2}{x^2+1}=1-\frac{2}{x^2+1}$.

Comme pour tout x réel , $x^2\geq 0$ alors $x^2+1\geq 1$.

$x^2+1\geq 1$ équivaut à $0<\frac{1}{x^2+1}\leq 1$ équivaut à $-1\leq\frac{-2}{x^2+1}<0$ équivaut à $0\leq f\left(x\right)<1$.

Ainsi, la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$ par 0 et 1.

2. Soit g la fonction définie sur $\left[0,1\right]$ par $f\left(x\right)=\sqrt{x\left(1-x\right)}$.

Fonctions minorées (majorées)

Pour tout x de $[0,1]$, $f(x)=\sqrt{x-x^2}=\sqrt{-(x^2-x)}=\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$.

$-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leq 0$ donc $-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leq\frac{1}{4}$ d'où $\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\leq\frac{1}{4}$. Par suite pour tout x de [0,1] , $0\leq f(x)\leq\frac{1}{2}$. La fonction f est donc bornée par 0 et $\frac{1}{2}$.

Remarque :

Graphiquement, si la courbe représentative de f était comprise entre les droites parallèles d'équations y = m et y = M , alors f est bornée par m et M.