Activités numériques

1-Activités numériques

1. a- Les différents ensembles de nombres

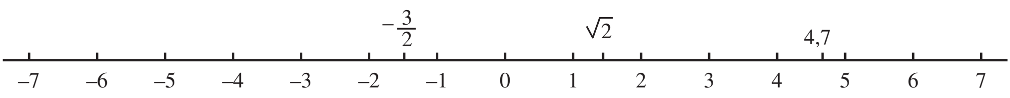
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels : 0, 1, 2, 3… Chaque naturel est un réel. On dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{R}$, ce que l'on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs (ou plus simplement l'ensemble des entiers) : …, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3… On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels : un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p entier et q entier non nul. On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Il existe des nombres réels qui ne sont pas des rationnels. Par exemple $\sqrt{2}$, π. On dit que ce sont des irrationnels.

L'ensemble de tous les nombres que nous utilisons en seconde s'appelle l'ensemble des nombres réels. Il est noté $\mathbb{R}$. On peut représenter chaque nombre réel par un point d'une droite graduée.



1.b- Quotients

▶ **Rappels des résultats essentiels**

	Formules
Signes	$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ avec $b \neq 0$
Simplification	$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$ avec $k \neq 0$ et $b \neq 0$
Egalité	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se traduit par $ad = bc$ avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$
Addition	$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ avec $b \neq 0$ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

Activités numériques

Multiplication	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$
Division	$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ avec $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$

1.c- Puissances d'un réel

Rappels des résultats essentiels

Soit a un nombre réel et n un entier naturel non nul

$a^1 = a$

$a^n = a \times a \times \ldots\ldots \times a$ (n facteurs, $n \geq 2$)

Pour $a \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ et, par convention, $a^0 = 1$.

Exemples : $(-2)^3 = -8$; $(-3)^4 = 81$; $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$.

Règles de calcul sur les puissances

a et b sont des nombres non nuls, et n et p des entiers relatifs

Formules	$a^n \times a^p = a^{n+p}$	$(a^n)^p = a^{np}$	$(ab)^n = a^n \times b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

La notation scientifique d'un nombre décimal positif est son écriture sous la forme $a \times 10^p$ avec $1 \leq a < 10$ et p entier relatif.

Exemples : $123{,}4 = 1{,}234 \times 10^2$; $0{,}0012 = 1{,}2 \times 10^{-3}$

Activités numériques

1.d- Racines carrées

Rappels des résultats essentiels

a étant un nombre réel positif, la racine carrée de a est par définition le réel positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est a.

Règles de calcul avec la racine carrée

a et b sont des nombres positifs et n un entier naturel non nul.

Formules	$\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{ab}$	$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ avec $b \neq 0$	$(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$

Application :

$$\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1\times(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = \frac{2-\sqrt{3}}{1} = 2-\sqrt{3}$$

$2-\sqrt{3}$ *est l expression conjuguée de* $2+\sqrt{3}$.

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)(4+\sqrt{5})}{(4-\sqrt{5})(4+\sqrt{5})} = \frac{4\sqrt{5}+5-4-\sqrt{5}}{16-5} = \frac{3\sqrt{5}+1}{11}$$

$4+\sqrt{5}$ *est l expression conjuguée de* $4-\sqrt{5}$.

2. Développement et factorisation

2.a- Développer une expression

Formules	Produits remarquables
$c(a+b) = ca+cb$ $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$	$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ $(a+b)(a-b)$

Activités numériques

Exemples

▶ Développer et réduire $A = 2x(5x-1)+(x-4)(3x+7)$

$A = 10x^2 - 2x + (3x^2 + 7x - 12x - 28)$

$A = 10x^2 - 2x + 3x^2 + 7x - 12x - 28$

$A = 13x^2 - 7x - 28$

▶ Développer et réduire $B = (2x-3)^2 - (3x-1)(5x+2)$

$B = (4x^2 - 12x + 9) - (15x^2 + 6x - 5x - 2)$

$B = 4x^2 - 12x + 9 - 15x^2 - 6x + 5x + 2$

$B = -11x^2 - 13x + 11$

▶ Développer et réduire $C = (x-4)^3$

$C = (x-4)(x-4)^2$

$C = (x-4)(x^2 - 8x + 16)$

$C = x^3 - 8x^2 + 16x - 4x^2 + 32x - 64$

$C = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

2.b- Factoriser une expression

Les factorisations est très importantes dans la résolution de certaines équations ou inéquations.

Exemples

▶ Factoriser $f(x) = (x+3)(4x+8) - (x+2)^2$

On a : $4x + 8 = 4(x+2)$ et $(x+2)^2 = (x+2)(x+2)$

Donc : $f(x) = 4(x+3)(x+2) - (x+2)(x+2)$

On peut alors mettre $(x+2)$ en facteur :

$$f(x) = (x+2)[4(x+3) - (x+2)] = (x+2)(4x+12-x-2)$$
$$= (x+2)(3x+10).$$

Activités numériques

- Factoriser $f(x) = 9(x-1)^2 - (2x+3)^2$.

On écrit $f(x) = [3(x-1)]^2 - (2x+3)^2$

$f(x)$ se présente ainsi comme une différence de deux carrés.

Or $a^2 - b^2$ se factorise en $(a+b)(a-b)$. D'où :

$$\begin{aligned} f(x) &= [3(x-1)+(2x+3)][3(x-1)-(2x+3)] \\ &= (3x-3+2x+3)(3x+-3-2x-3) \\ &= 5x(x-6). \end{aligned}$$

- Factoriser $f(x) = x^2 - 9 + (x-3)(2x+5)$

On a : $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

D'où : $f(x) = (x+3)(x-3) + (x-3)(2x+5)$

On peut mettre $(x-3)$ en facteur :

$f(x) = (x-3)[(x+3)+(2x+5)]$ c'est-à-dire $f(x) = (x-3)(3x+8)$.

4. Ordre et valeur absolue

4.a- Intervalles, inégalités

Rappels

a et b sont des nombres réels tels que $a < b$.

L'ensemble des nombres réels x tels que	est l'intervalle
$a \leq x \leq b$	$[a;b]$
$a < x < b$	$]a; b[$
$a < x \leq b$	$]a; b]$
$a \leq x < b$	$[a; b[$
$x \leq a$	$]-\infty; a]$
$x < a$	$]-\infty; a[$
$x \geq a$	$[a; +\infty[$
$x > a$	$]a; +\infty[$

Activités numériques

▶ **Pour comparer deux nombres on cherche le signe de leur différence.**

Règles de calcul sur les inégalités

Si $a \le b$ alors $a + c \le b + c$

Si $a \le b$ et $c \ge 0$ alors $ac \le bc$

Si $a \le b$ et $c \le 0$ alors $ac \ge bc$

Si $a \le b$ et $c \le d$ alors $a + c \le b + d$

Si $0 \le a \le b$ et $0 \le c \le d$ alors $ac \le bd$

Théorèmes de rangement

Si $0 \le a < b$ alors $a^2 < b^2$

Si $a < b \le 0$ alors $a^2 > b^2$

Si $0 \le a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

Si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Si $0 \le a \le 1$ alors $a^2 \le a$

Si $a \ge 1$ alors $a^2 \ge a$

4.b- Valeur absolue

▶ La valeur absolue d'un réel x (notée $|x|$) est la distance de x à 0.

Si $x \ge 0$ alors $|x| = x$ et si $x \le 0$ alors $|x| = -x$.

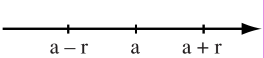
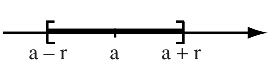
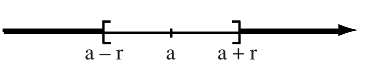
▶ **Propriétés des valeurs absolues**

$|x| = 0$ équivaut à $x = 0$.

$|-x| = |x|$.

$|x| = |y|$ équivaut à $x = y$ ou $x = -y$.

Soit r un réel positif et a un réel quelconque. Les énoncés de chaque colonne du tableau ci-dessous sont équivalents.

$\lvert x-a \rvert = r$	$\lvert x-a \rvert \le r$	$\lvert x-a \rvert > r$
		
$x = a + r$ ou $x = a - r$ $x \in \{a + r \,;\, a - r\}$	$a - r \le x \le a + r$ $x \in [a - r \,;\, a + r]$	$x < a - r$ ou $x > a + r$ $x \in]-\infty; a - r[\cup]a + r; +\infty[$

Activités numériques

C. Approximations d'un réel

Des résultats à retenir

Un nombre est souvent connu par des valeurs approchées décimales.

Par exemple, pour $\sqrt{2}$ la calculatrice affiche : 1,414213562

	Définition	Exemple
Encadrement	Le nombre x est encadré par deux réels a et b lorsque : $a \leq x \leq b$. $b - a$ est l'amplitude.	Encadrement de $\sqrt{2}$ par deux décimaux d'ordre 2 : $1{,}41 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}42$ 10^{-2} est l'amplitude.
Valeur approchée	A est une valeur approchée de x à α près lorsque : $A - \alpha \leq x \leq A + \alpha$	1,415 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 0,005 près car : $1{,}415 - 0{,}005 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}415 + 0{,}005$
	A est une valeur approchée de x par défaut à α près lorsque : $A \leq x \leq A + \alpha$	1,41 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à 10^{-2} près car : $1{,}41 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}41 + 10^{-2}$
	A est une valeur approchée de x par excès à α près lorsque : $A - \alpha \leq x \leq A$	1,42 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par excès à 10^{-2} près car : $1{,}42 - 10^{-2} \leq \sqrt{2} \leq 1{,}42$