

Exercice 1 : (5 points)

Répondre par Vrai ou Faux aux cinq questions ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

Soit (\mathcal{C}) un cercle de centre O , A un point de ce cercle et (D) la tangente à (\mathcal{C}) en A .

Soit r la rotation directe de centre O et d'angle α appartenant à $]0, \pi[$.

L'image de A par la rotation r est le point B . (Δ) est la tangente à (\mathcal{C}) en B .

- 1) Le point B appartient au cercle (\mathcal{C}) .
- 2) A est l'image de B par la rotation indirecte de centre O et d'angle α .
- 3) L'image du cercle (\mathcal{C}) est un cercle (\mathcal{C}') de centre B et de rayon OA .
- 4) L'image de (D) par la rotation r est parallèle à (D) .
- 5) Soit C le point d'intersection de (D) et (Δ) . $OACB$ est un carré lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2 : (5 points)

Une usine a produit 3500 tonnes de ciments au cours de l'année 1990.

La production a ensuite diminué régulièrement de 15% par an jusqu'à la fin de l'année 2000.

On note P_n la production en tonnes de cette usine au cours de l'année $(1990 + n)$.

Ainsi $P_0 = 3500$.

1. Vérifier que $P_1 = 2975$ et calculer P_2 .
2. a) Montrer que la suite (P_n) est géométrique et déterminer sa raison.
b) Exprimer, pour $n \leq 10$, P_n en fonction de n et calculer la production de cette usine au cours de l'année 2000.

Exercice 3 : (4 points)

Soit (U_n) la suite géométrique de troisième terme 12 et de sixième terme -96.

1. Montrer que la raison de (U_n) est $q = -2$ et son premier terme est $U_0 = 3$.
2. Donner U_n en fonction de n .
3. Vérifier que pour tout entier n , $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = 1 - (-2)^{n+1}$

Exercice 4 : (6 points)

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle rectangle en A tel que $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, (\mathcal{C}) est son cercle

circonscrit et O est le milieu de [BC]. On désigne par r la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On appelle (Δ) la tangente au cercle (\mathcal{C}) en B.

1. a) Montrer que $r(B) = O$.

b) Placer le point $O' = r(O)$. Montrer que $r(\Delta)$ est la médiatrice de [AB].

c) Construire (\mathcal{C}') l'image de (\mathcal{C}) par r.

2. Soit $C' = r(C)$, montrer que C' est le symétrique de O par rapport à O' .

3. Soit M un point quelconque de l'arc \widehat{AC} ne contenant pas B du cercle (\mathcal{C}) et $r(M) = M'$.

Déterminer l'ensemble des point M' , lorsque m décrit l'arc \widehat{AC} ne contenant pas B.

Corrigé**Exercice 1 :**

1. Vrai ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Faux ; 5. Vrai

Exercice 2 :

$$1. P_1 = 3500 \times (1 - 0,15) = 3500 \times 0,85 = 2975.$$

$$P_2 = 2975 \times (1 - 0,15) = 2975 \times 0,85 = 2528,750.$$

2. a) On sait que :

P_n la production en tonnes de cette usine au cours de l'année (1990 + n),

P_{n+1} la production en tonnes de cette usine au cours de l'année (1990 + (n+1))

$$P_{n+1} = P_n \times (1 - 0,15) = 0,85 \times P_n \text{ donc } (P_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = 0,85.$$

$$b) \text{ Pour } n \leq 10, P_n = P_0 \times (0,85)^n = 3500 \times (0,85)^n.$$

La production de cette usine au cours de l'année 2000 est : $P_{10} = 3500 \times (0,85)^{10} \approx 689,06$ tonnes.

Exercice 3 :

Soit (U_n) la suite géométrique de troisième terme 12 et de sixième terme -96.

$$1. \text{ On a : } U_2 = 12 \text{ et } U_5 = -96.$$

$$\text{Soit } q \text{ la raison de la suite } (U_n), U_5 = U_2 \times q^3 \text{ donc } q^3 = \frac{U_5}{U_2} = -\frac{96}{12} = -8 \text{ d'où } q = -2.$$

$$\text{D'autre part : } U_2 = 12 \text{ équivaut à } U_0 \times q^2 = 12 \text{ équivaut à } U_0 = \frac{12}{q^2} \text{ équivaut à } U_0 = 3.$$

$$2. \text{ Pour tout entier naturel } n, \text{ on a : } U_n = U_0 \times q^n = 3 \times (-2)^n.$$

$$3. \text{ Vérifier que pour tout entier } n, S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = U_0 \frac{1 - (-2)^{n+1}}{1 - (-2)} = 3 \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3} = 1 - (-2)^{n+1}$$

Exercice 4 :

1. a) A, B et C appartiennent au cercle (\mathcal{C}) de centre O donc $OA = OB = OC$.

Or $\angle ABO = \angle ABC = \frac{\pi}{3}$ ce qui implique le triangle OAB est équilatéral.

$$\text{D'où } \begin{cases} OA = OB \\ \angle BAO = \frac{\pi}{3} \text{ (direct)} \end{cases} \quad \text{ou encore } r(B) = O.$$

b) Soit $O' = r(O)$. (Δ) est la perpendiculaire en B à la droite (OB) donc $r(\Delta)$ est la perpendiculaire en $r(B) = O'$ à la droite $r((OB)) = (OO')$. Or (OO') est parallèle à (AC) d'où $r(\Delta)$ est perpendiculaire à (AB) et comme $OA = OB$ alors $r(\Delta)$ est médiatrice de [AB].

c) (\mathcal{C}') l'image de (\mathcal{C}) par r est le cercle de centre $r(O) = O'$ et de même rayon que (\mathcal{C}).

2. Soit $C' = r(C)$, O est le milieu du segment [BC] donc O' est le milieu du segment $s([BC]) = [OC']$ d'où C' est le symétrique de O par rapport à O' .

3. Lorsque M décrit l'arc [AC] ne contenant pas B du cercle (\mathcal{C}), $r(M) = M'$ décrit l'arc r

$([AC]) = [AC']$ ne contenant pas $r(B) = O$ du cercle (\mathcal{C}')

