

Graphes orientés

Un graphe orienté est un graphe dont les arêtes sont orientées : on parle alors de l'origine et de l'extrémité d'une arête.

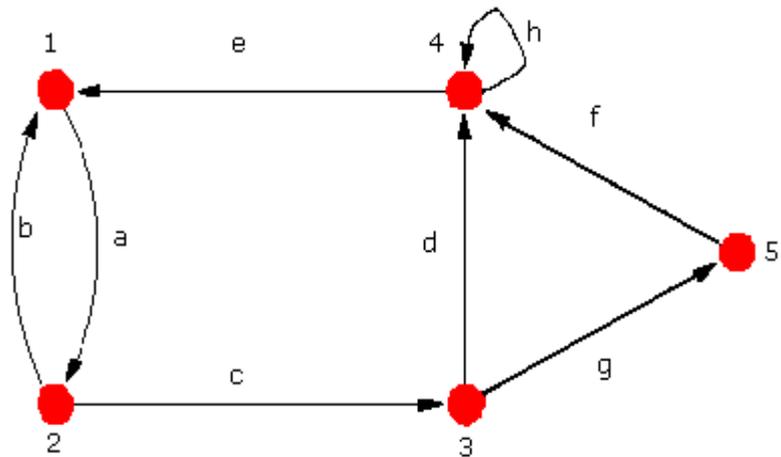
Une boucle est une arête orientée dont l'origine et l'extrémité sont les mêmes.

On définit de même une chaîne orientée, une chaîne eulérienne orientée, un cycle orienté ...

Exemple :

On considère le graphe G

ci-contre :



Le graphe ci dessus est orienté. L'arête a d'origine 1 et d'extrémité 2 est distincte de l'arête b d'origine 2 et d'extrémité 1. L'arête h est une boucle.

(1-2-3-5) est une chaîne orientée de 2 à 4. (e, a, c, d) est un cycle orienté.

Matrices d'un graphe orienté

La matrice d'un graphe orienté d'ordre n est une matrice de dimension n x n, où le terme à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne vaut 1 s'il y a une arête dont l'origine est i et l'extrémité est j.

Exemple :

La matrice associée au graphe G est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Graphe étiqueté

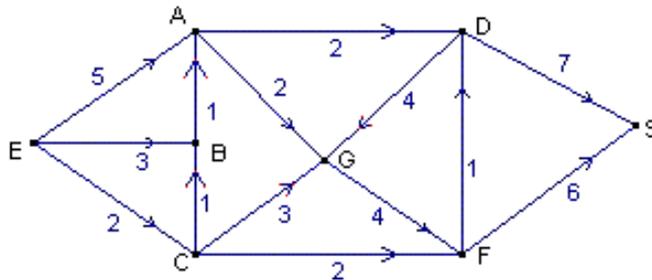
Un graphe étiqueté est un graphe orienté, dont les arêtes sont affectées d'étiquettes.

Si toutes les étiquettes sont des nombres positifs, on parle de graphe pondéré.

Dans ce cas, le poids d'une chaîne est la somme des poids des arêtes orientées qui la composent. Une plus courte chaîne entre deux sommets, est parmi les chaînes qui les relient, une chaîne de poids minimum.

Exemple :

Le graphe orienté ci-dessous est pondéré. La chaîne orientée (C-B-A-G-F), définie ici par la suite des sommets qui la composent, a pour poids: $1 + 1 + 2 + 4 = 8$.



Graphe probabiliste

Un graphe probabiliste est un graphe orienté, pondéré, tel que la somme des poids des arêtes sortant de chaque sommet donné vaut 1.

Les graphes probabilistes sont utilisés pour modéliser l'évolution d'un individu pouvant changer aléatoirement d'état : les sommets du graphe sont les états possibles de l'individu et le poids d'une arête orientée issue du sommet i , et d'extrémité j est la probabilité de transition de l'état i à l'état j . L'état probabiliste de l'individu est une loi de probabilité sur l'ensemble des états possibles : cette loi sera ici représentée par une matrice ligne.

Un graphe probabiliste peut aussi être utilisé pour décrire l'évolution d'un système formé de plusieurs composants pouvant se trouver dans différents états (l'ensemble des états est le même pour chaque composant). L'état du système à un instant donné est la matrice ligne donnant le nombre de composants du système dans chaque état.

La matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre n est de dimension $n \times n$.

Le terme à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne a pour valeur le poids de l'arête orientée allant de i à j si cette arête existe, sinon prend la valeur 0.

Exemple :

Le graphe d'ordre 3 ci-dessous est un graphe probabiliste. Sa matrice de transition est donnée ci-dessous. La somme des éléments d'une ligne de cette matrice vaut 1.

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

