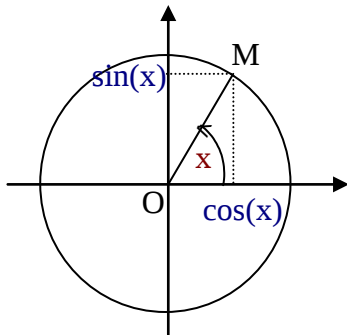


Trigonométrie

I- Sinus et cosinus d'un réel

1. Définitions



Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère le cercle trigonométrique de centre O.

A tout réel x , on associe le point M du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

On appelle alors $\cos x$ l'abscisse et $\sin x$ l'ordonnée du point M.

2. Valeurs remarquables

angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

3. Propriétés

Pour tout réel x , on a les propriétés suivantes :

- $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$
- $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

4. Définition: Tangente

Pour $a \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$

5. Formules

Dans les formules ci-dessous, a et b sont deux réels quelconques.

$$\begin{aligned}\cos(-a) &= \cos a \\ \sin(-a) &= -\sin a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\pi - a) &= -\cos a \\ \sin(\pi - a) &= \sin a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\pi + a) &= -\cos a \\ \sin(\pi + a) &= -\sin a\end{aligned}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

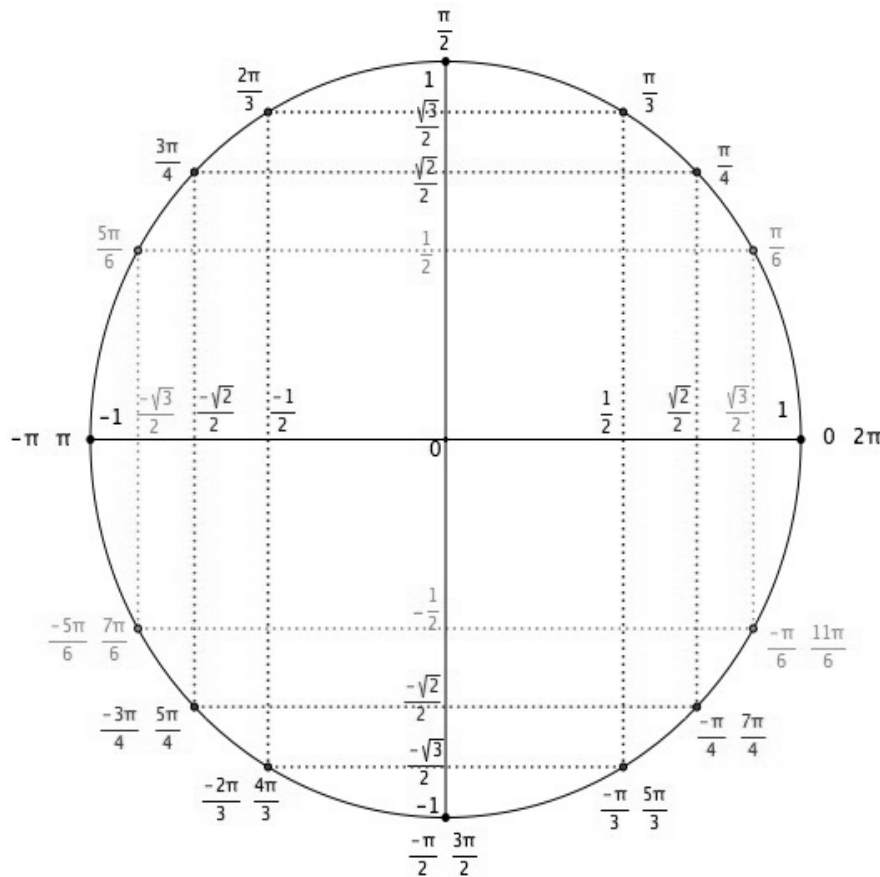
$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$$

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$$



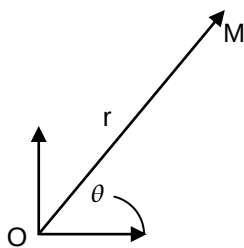
Trigonométrie



II-Coordonnées polaires d'un point

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Définition



Pour tout point M distinct de O , un couple (r, θ) tel que $OM = r$ et θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ est un couple de coordonnées polaires de M .

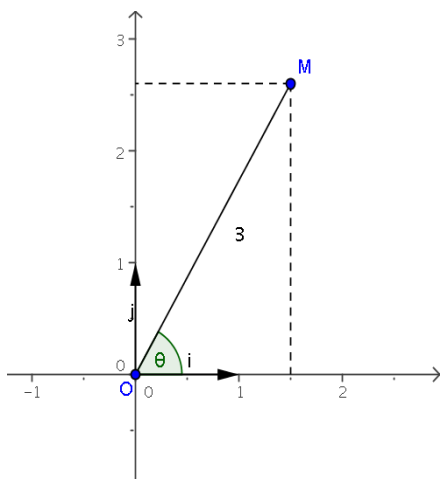
2. Lien entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes

Soit M un point de coordonnées cartésiennes (x, y) et de coordonnées polaires (r, θ) .
On a les trois égalités suivantes :

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $x = r \cos \theta$ ou encore $\cos \theta = \frac{x}{r}$
- $y = r \sin \theta$ ou encore $\sin \theta = \frac{y}{r}$

Trigonométrie

Exemple 1



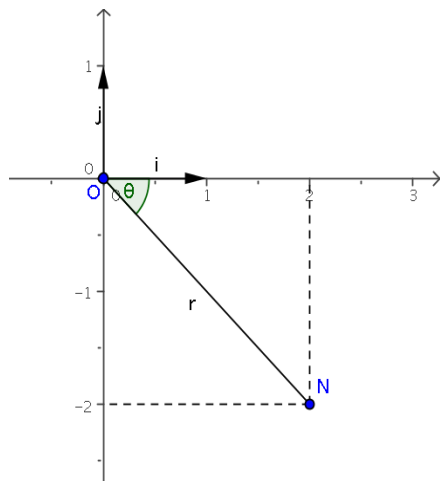
Le point M a pour coordonnées polaires $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$.

Quelles sont les coordonnées cartésiennes de M ?

$$\text{On a } x = 3 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad y = 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Donc les coordonnées cartésiennes de M sont donc $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exemple 2



Le point N a pour coordonnées cartésiennes $(2, -2)$.

Quelles sont les coordonnées polaires de N ?

$$\text{On a } r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$\cos \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{donc}$$

$$\theta \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

Les coordonnées polaires de N sont donc $\left(2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$.