Fonction réciproque

Fonction bijective

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
La fonction f est une bijection de I sur J si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- ✓ pour tout x de I, le réel f(x) appartient à J
- ✓ pour tout réel y de J, l'équation f(x) = y admet une seule solution x dans I.

Théorèmes :

1. Si f est continue et strictement croissante sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I sur f(I) .

Si $I=[a,b]$ alors $f(I)=[f(a),f(b)]$	Si $I=[a,+\infty[$ alors $f(I)=\left[f(a),\lim\limits_{+\infty} f\right[$
Si $I=]a,b]$ alors $f(I)=\left]\lim\limits_{a^+} f,f(b)\right]$	Si $I=]a,+\infty[$ alors $f(I)=\left]\lim\limits_{a^+} f,\lim\limits_{+\infty} f\right[$
Si $I=[a,b[$ alors $f(I)=\left[f(a),\lim\limits_{b^-} f\right[$	Si $I=]-\infty,b]$ alors $f(I)=\left]\lim\limits_{-\infty} f,f(b)\right]$
Si $I=]a,b[$ alors $f(I)=\left]\lim\limits_{a^+} f,\lim\limits_{b^-} f\right[$	Si $I=]-\infty,b[$ alors $f(I)=\left]\lim\limits_{-\infty} f,\lim\limits_{b^-} f\right[$

2. Si f est continue et strictement décroissante sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I sur f(I) .

Si $I=[a,b]$ alors $f(I)=[f(b),f(a)]$	Si $I=[a,+\infty[$ alors $f(I)=\left]\lim\limits_{+\infty} f,f(a)\right]$
Si $I=[a,b[$ alors $f(I)=\left]\lim\limits_{b^-} f,f(a)\right]$	Si $I=]a,+\infty[$ alors $f(I)=\left]\lim\limits_{+\infty} f,\lim\limits_{a^+} f\right[$
Si $I=]a,b]$ alors $f(I)=\left[f(b),\lim\limits_{a^+} f\right[$	Si $I=]-\infty,b]$ alors $f(I)=\left[f(b),\lim\limits_{-\infty} f\right[$
Si $I=]a,b[$ alors $f(I)=\left]\lim\limits_{b^-} f,\lim\limits_{a^+} f\right[$	Si $I=]-\infty,b[$ alors $f(I)=\left]\lim\limits_{b^-} f,\lim\limits_{-\infty} f\right[$

Fonction réciproque

Si f est une fonction continue et strictement croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors :

- ✓ f est une bijection de I sur l’intervalle f (I).
- ✓ la fonction réciproque f^{-1} de f est continue et strictement croissante (respectivement décroissante) sur l’intervalle f(I).

Fonction réciproque

✓ $\begin{cases} x \in I \\ f(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in f(I) \\ f^{-1}(y) = x \end{cases}$

✓ Pour tout x de , $(f^{-1} \circ f)(x) = x$; pour tout x de f(I) , $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x$.

✓ Les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à Δ : y = x dans un repère orthonormé du plan.

Dérivée d'une composée

La fonction f est dérivable sur un intervalle I et la fonction g est dérivable sur un intervalle J inclus dans f(I) alors la fonction

$g \circ f$ est dérivable sur I, et on a : pour tout x de I, $(g \circ f)'(x) = f'(x).g'(f(x))$.

Dérivée de la fonction réciproque

Soit f une bijection de I sur f (I) .

Si f est dérivable sur I et pour tout x de I, f ' (x) $\neq 0$ alors est dérivable sur f (I) et on a : pour tout y de I, $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, où y = f (x).