Série : Primitives

Exemples

Déterminez une primitive de f sur I dans chacun des cas suivants :

	Brouillon (méthodes ; astuces)
a) $f(x)=12x^5-4x^3+1$; $I=\mathbb{R}$ f est continue sur IR. Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur IR est la fonction F telle que $F(x) = 12\frac{x^6}{6} - 4\frac{x^4}{4} + x = 2x^6 - x^4 + x$	pas difficulté majeure : $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
b) $f(x)=3-\frac{4}{x^2}$; $I=]0\,;+\infty[$ f est continue sur]0 ; +∞[. Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur IR est la fonction F telle que $F(x) = 3x - 4\frac{-1}{(2-1)x^{2-1}} = 3x + \frac{4}{x}$	$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$ et $n \neq 1$) $F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$
c) $f(x)=\frac{3x}{(x^2+1)^3}$; $I=\mathbb{R}$ f est continue sur IR (fonction rationnelle définie sur IR). Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur IR est la fonction F telle que $F(x) = \frac{3}{2}\left[\frac{-1}{2(x^2+1)^2}\right] = \frac{-3}{4(x^2+1)^2}$ *(pour s'en convaincre, dériver F(x))*	f(x) est sous la forme $\frac{U'}{u^n}$ avec : $u = x^2 + 1$ et $n = 3$ Mais, $\frac{U'}{u^n} = \frac{2x}{(x^2+1)^3}$: il faut ajuster les coefficients dans l'écriture de f(x). $f(x) = \frac{3}{2}\left[\frac{2x}{(x^2+1)^3}\right]$ $F(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$
d) $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$; $I=]1\,;+\infty[$ f est continue sur]1 ; +∞[comme quotient de deux fonctions continues. Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur IR est la fonction F telle que $F(x) = 2\sqrt{x^2-1}$	f(x) est sous la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec : $u = x^2 - 1$ Et, $\frac{u'}{\sqrt{u}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$: $F(x) = 2\sqrt{u}$
e) $f(x)=\frac{6x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}$; $I=\mathbb{R}$ $\frac{6x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}$	idem au précédent, mais il faut penser à ajuster les coefficients dans l'écriture de f(x) : $f(x) = 3\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)$
f) $f(x)=-\sin x+2\cos x$; $I=\mathbb{R}$ f est continue sur IR. Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur IR est la fonction F telle que F(x) = cos x + 2sin x	pas difficulté majeure : f(x) = sin x : F(x) = -cos x g(x) = cos x : G(x) = sin x

Série : Primitives

	Brouillon (méthodes ; astuces)
g) $f(x)=\sqrt{2x+3}$; $I=\left]-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$ f est continue sur $\left]-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$. Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur IR est la fonction F telle que $F(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+3)^{0,5+1}}{0,5+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(2x+3)\sqrt{2x+3}$ $=\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}$	f(x) est sous la forme $u'\times u^r$ avec : $u=2x+3$ et $r=0,5$ Mais, $u'\times u^r=2\sqrt{2x+3}$: il faut ajuster les coefficients dans l'écriture de f(x). $f(x)=\frac{1}{2}(2\sqrt{2x+3})$ $F(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{r+1}}{r+1}$
h) $f(x)=(2x+3)\sqrt{2x+3}$; $I=\left]-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$ f est continue sur $\left]-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$. Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur IR est la fonction F telle que $F(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+3)^{1,5+1}}{1,5+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot(2x+3)^2\sqrt{2x+3}$ $=\frac{1}{5}(2x+3)^2\sqrt{2x+3}$ *(pour s'en convaincre, dériver F(x))* pour $n\in$ IN et $a>0$: $a^{n+0,5}=a^n\sqrt{a}$ avec les racines carrées, il est souvent utile d'utiliser les puissances rationnelles	On a $f(x)=(2x+3)^{1,5}$ qui est sous la forme $u'\times u^r$ avec : $u=2x+3$ et $r=0,5$ Mais, $u'\times u^r=2(2x+3)^{1,5}$: il faut ajuster les coefficients dans l'écriture de f(x). $f(x)=\frac{1}{2}[(2x+3)\sqrt{2x+3}]$ $F(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{r+1}}{r+1}$
i) $f(x)=2\sin x(\cos^8x-2\cos^6x+\cos^4x)$ f est continue sur IR. Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur IR est la fonction F telle que $F(x)=2\left(-\frac{\cos^9x}{9}\right)-4\left(-\frac{\cos^7x}{7}\right)+2\left(-\frac{\cos^5x}{5}\right)$ $F(x)=-\frac{2}{9}\cos^9x+\frac{4}{7}\cos7x-\frac{2}{5}\cos^5x$ *(pour s'en convaincre, dériver F(x))*	pas difficulté majeure : $f(x)=u'\times u^n$ ($n\in\mathbb{N}$) $u=\cos x$ et $n\in\{4\,;6\,;8\}$ $F(x)=\frac{u^{n+1}}{n+1}=-\frac{\cos^{n+1}x}{n+1}$
j) $f(x)=\cos^4x$ ▸ On linéarise f(x) (voir chap sur les nombres complexes, page 15) on a : $\cos^4x=\frac{1}{8}\cos4x+\frac{1}{2}\cos2x+\frac{3}{8}$ ▸ f est continue sur IR. Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur IR est la fonction F telle que $F(x)=\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin4x}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin2x}{2}+\frac{3}{8}x=\frac{\sin4x}{32}+\frac{\sin2x}{4}+\frac{3}{8}x$	pas difficulté majeure : $f(x)=u'\cos u$ $F(x)=\sin u$
k) $f(x)=\cos^2x\sin^4x$ ▸ On linéarise f(x) (voir chap sur les nombres complexes, page 15) on a : $\cos^2x\cos^4x=\frac{1}{32}\cos6x-\frac{1}{16}\cos4x-\frac{1}{32}\cos2x+\frac{1}{16}$ ▸ f est continue sur IR. Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur IR est la fonction F telle que F(x) = …	(procéder comme dans l'exemple précédent)