Equations différentielles

1 Equation différentielle y' = a y $\quad avec \quad a \neq 0$

Théorème

L'ensemble des solutions sur R de l'équation différentielle $y' = a\,y \quad avec\ a \neq 0$ est l'ensemble des fonctions f telles que *pour tout* $x \in \mathbf{R},\ f\,(x) = k\,e^{ax}$ *où* $k \in \mathbf{R}$

2 Equation différentielle y' = a y + b $\quad avec \quad a \neq 0 \quad et \quad b \neq 0$

Théorème

L'ensemble des solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle $y' = a\,y + b$ *avec* $a \neq 0$ *et* $b \neq 0$ est l'ensemble des fonctions f telles que $\forall x \in \mathbf{R},\ f\,(x) = k\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ *où* $k \in \mathbf{R}$

Propriété

Pour tout couple (x_0, y_0) de réels, l'équation différentielle $y' = a\,y + b$ *avec* $a \neq 0$ *et* $b \neq 0$ admet une solution f et une seule telle que $f(x_0) = y_0$

Exemple 1

Résoudre l'équation différentielle $2\,y' + 3y = 0$

On écrit l'équation différentielle sous la forme $y' = -\dfrac{3}{2}y$

Les solutions dans $\mathbf{R}$ sont les fonctions définies *pour tout* $x \in \mathbf{R}$ par $f\,(x) = k\,e^{-\frac{3}{2}x}$ *avec* $k \in \mathbf{R}$

Exemple 2

Trouver la solution f de l'équation différentielle $2\,y' + 3y = 0$ telle que $f(2) = 1$

D'après l'exercice précédent , les solutions dans $\mathbf{R}$ sont les fonctions

Equations différentielles

$$f(x) = k e^{-\frac{3}{2}x} \quad avec \ k \in \mathbf{R}$$

Traduisons la condition initiale $f(2)=1$ soit $f(2) = k e^{-3} = 1$ $\quad soit \ k = e^{3}$

Ainsi, la solution f de $2y'+3y=0$ telle que $f(2)=1$ est la fonction $f(x) = e^{3} e^{-\frac{3}{2}x} = e^{3(1-\frac{1}{2}x)}$

Exemple 3

(E) est l'équation différentielle $y' = -2y+5$

Résoudre (E) et déterminer la solution f de (E) telle que $f(0)=2$

Les solutions de (E) sur $\mathbf{R}$ sont les fonctions

$$f(x) = k e^{-2x} + \frac{5}{2} \quad avec \ k \in \mathbf{R}$$

Traduisons la condition $f(0)=2$ soit $f(0) = k + \frac{5}{2} = 2 \ \ et \ \ donc \ k = -\frac{1}{2}$

La solution de $y' = -2y+5$ telle que $f(0)=2$ est la fonction $f(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{5}{2}$

Equations différentielles

❸ Equation différentielle $y''+\omega^2 y=0$ *avec* $\omega\in\mathbf{R}^*$

Théorème

L'ensemble des solutions sur R de l'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$ *avec* $\omega\in\mathbf{R}^*$ est l'ensemble des fonctions f telles que

$$\textit{pour tout } x\in\mathbf{R},\qquad f(x)=k_1\cos\omega x+k_2\sin\omega x\ \ \textit{avec}\ \ k_1\in\mathbf{R},\ k_2\in\mathbf{R}$$

Remarque

On peut aussi écrire les solutions sous la forme

$$\textit{pour tout } x\in\mathbf{R},\qquad f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)\ \ \textit{avec}\ \ A\in\mathbf{R},\ \varphi\in\mathbf{R}$$

Exemple

1. Résoudre l'équation différentielle $y''+9y=0$
2. Trouver la solution de l'équation précédente qui satisfait les conditions $f(0)=1$ et $f'(\pi)=-2$

Solution:

1. Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$f(x)=k_1\cos 3x+k_2\sin 3x\ \ \textit{avec}\ \ k_1\in\mathbf{R},\ k_2\in\mathbf{R}$$

2. Il s'agit de trouver une fonction f dont les constantes k_1 *et* k_2 vérifient les conditions imposées.

La condition $f(0)=1$ est équivalente à $f(0)=k_1\cos 0+k_2\sin 0=k_1=1$ soit $k_1=1$

De même, nous avons pour tout réel x,

$$f'(x)=-3k_1\sin 3x+3k_2\cos 3x$$

La condition $f'(\pi)=-2$ est équivalente à $f'(\pi)=-3k_1\sin 3\pi+3k_2\cos 3\pi=-3k_2=-2$

soit $k_2=\dfrac{2}{3}$

La solution cherchée est la fonction

$$f_{1,\frac{2}{3}}\ :\ x\mapsto\cos 3x+\frac{2}{3}\sin 3x$$