Similitudes

I- Homothéties

Une homothétie de rapport λ (λ réel non nul) :

conserve	transforme	multiplie
Les mesures angles orientés	Une droite en une droite parallèle	Les distances par $\lvert\lambda\rvert$

II- Similitudes directes

II-1. Définition :

Une similitude directe est une transformation du plan qui multiplie les distances par un réel strictement positif et qui conserve les mesures des angles orientés.

Conséquences :

- ✓ Une similitude directe est la composée d'une homothétie et d'un déplacement.
- ✓ Une similitude directe de rapport 1 est un déplacement.
- ✓ Une similitude directe, qui n'est pas une translation, admet un unique point invariant Ω appelé son centre.

II- 2. Propriétés :

Une similitude directe s est entièrement déterminée par la donnée de deux points distincts A et B et de leur image A' et B'.

Eléments caractéristiques : s est la similitude directe transformant A en A' et B en B'

Le rapport k et l'angle θ de s sont donnés par : $k = \dfrac{A'B'}{AB}$ et $\theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right)[2\pi]$.

Lorsque s n'est pas une translation : s(M) = M' $\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k.\Omega M \\ \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \theta[2\pi],\ M \neq \Omega \end{cases}$

Forme réduite (canonique)

Si $k \in IR_+^* \setminus \{1\}$ alors $s = R(\Omega , \theta) \circ H(\Omega , k) = H(\Omega , k) \circ R(\Omega , \theta)$

Classification: Soit s une similitude directe de rapport k et d'angle θ . Le tableau ci-dessous énumère les différentes formes que peut prendre s :

K = 1	$\theta = 0$ translation	$\theta = \pi$ symétrie centrale	$\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$ rotation d'angle θ
K ≠ 1	Homothétie de rapport k	Homothétie De rapport - k	Similitude directe à centre , de rapport k et d'angle θ

Propriétés:

- ✓ Une similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ est une bijection et sa bijection réciproque est une similitude directe de même centre Ω,de rapport $\dfrac{1}{k}$ et d'angle –θ.
- ✓ La composée de deux similitudes directes de rapports respectifs k et k' et d'angles respectifs θ et θ' est une similitude directe de rapport k.k' et d'angle θ+θ'.

Similitudes

II-3. Construction du centre d'une similitude directe :

1. Si s est donnée par son rapport k , son angle θ et un point A et son image A' alors Ω est l'unique point d'intersection des ensembles suivants :

$$(E) = \left\{M, M \in P / \frac{MA'}{MA} = k\right\} \quad \text{et} \quad (E') = \left\{M, M \in P / \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'}}\right) \equiv \theta[2\pi]\right\}$$

2 Si s est donnée par deux points distincts A et B et leur images A' et B' alors le centre Ω de s est le points d'intersection des ensembles suivants :

$$(E) = \left\{M, P \in P / \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'}}\right) \equiv \theta[2\pi]\right\} \quad \text{et} \quad (E') = \left\{M, P \in P / \left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MB'}}\right) \equiv \theta[2\pi]\right\}$$

II-5. Similitude directe et nombre complexe :

Soit a et b deux nombres complexes avec a non nul.

L'application $z \mapsto a.z + b$ est l'écriture complexe d'une :

- ✓ la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b , lorsque a = 1.
- ✓ la similitude directe de rapport $k = |a|$, d'angle θ un argument de a et de centre Ω le point d'affixe ω tel que $\omega = a.\omega + b$, lorsque $a \neq 1$.

III- Similitudes indirectes

III-1. Définition :

Une similitude indirecte est une transformation du plan qui multiplie les distances par un réel strictement positif et renverse les mesures des angles orientés.

Conséquences :

- ✓ Une similitude indirecte est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement.
- ✓ Une similitude indirecte de rapport 1 est un antidéplacement.
- ✓ Une similitude indirecte qui n'est pas un antidéplacement admet un unique point invariant : son centre.
- ✓ Une similitude indirecte σ est entièrement déterminée par la donnée de deux points distincts A et B et de leur image A' et B'. Le rapport de s est : $k = \frac{A'B'}{AB}$

III-2. Propriétés

Soit σ est une similitude indirecte de rapport $k \neq 1$:

Forme réduite : $\sigma = H(\Omega, k) \circ S_\Delta = S_\Delta \circ H(\Omega, k)$ où (Δ) est l'axe de σ , $\underline{\Omega \in \Delta}$.

Remarquons que : $\sigma \circ \sigma = H(\Omega, k^2)$.

Axe : Soit M un point M distinct de Ω d'image M′ par σ ,

- ✓ lorsque les points Ω , M et M' ne sont pas alignés , (Δ) est la bissectrice intérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)$.
- ✓ lorsque les points Ω , M et M' sont alignés tels que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$, $\Delta = (\Omega M)$.
- ✓ lorsque les points Ω , M et M' sont alignés tels que $\overrightarrow{\Omega M'} = -k\overrightarrow{\Omega M}$, Δ est la perpendiculaire à la droite (ΩM) en Ω .

Composition :

- ✓ la composée d'une similitude directe de rapport k et d'une similitude indirecte de rapport k' est une similitude indirecte de rapport kk'.
- ✓ la composée de deux similitudes indirectes de rapports k et k' est une similitude directe de rapport kk'.