

Primitives

I- Définition et théorèmes

Définition :

Soit f et F deux fonctions définies et continues sur un intervalle I .
 F est dite une primitive de f sur I si, et seulement si, F est dérivable sur I et pour tout x de I ,
 $F'(x) = f(x)$.

Remarque:

Pour vérifier que F est une primitive de f sur I , il suffit de dériver F ; on doit trouver que $F' = f$.

Théorème 1:

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I .

Théorème 2:

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I .
 Alors toutes les primitives de f sur I sont les fonctions G définies sur I par : pour tout x de I , $G(x) = F(x) + c$, avec c un nombre réel.

Théorème 3:

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I , x_0 un point de I et y_0 un réel quelconque fixé.

Il existe alors une **unique** primitive de f , F , telle que $F(x_0) = y_0$.

F est appelée la primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0 .

Théorème 4:

Si f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , a et b deux réels, F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I , alors $aF + bG$ est une primitive de $af + bg$ sur I .

Retenons

Si f et g sont deux dérivables sur un intervalle I telles que, pour tout x de I , $f'(x) = g'(x)$ alors il existe un nombre réel c tel que, pour tout x de I , $g(x) = f(x) + c$

II- Calcul de primitives de fonctions usuelles.

Donnons donc le tableau des primitives qui doit être parfaitement connu (c est un réel) :

Si f est définie par	sur l'intervalle	alors ses primitives s'écrivent
a , a réel fixé	\mathbb{R}	$ax + c$
x	\mathbb{R}	$\frac{1}{2}x^2 + c$
x^n , $n \geq 1$	\mathbb{R}	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
x^n , $n < -1$	\mathbb{R}_-^* ou \mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}_-^* ou \mathbb{R}_+^*	$-\frac{1}{x} + c$
$\cos x$	\mathbb{R}	$\sin x + c$
$\sin x$	\mathbb{R}	$-\cos x + c$

Primitives

$\cos(ax + b), a \neq 0$	\mathbb{R}	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$
$\sin(ax + b), a \neq 0$	\mathbb{R}	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$	$\tan x + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$2\sqrt{x} + c$
\sqrt{x}	$[0, +\infty[$	$\frac{2}{3} x\sqrt{x} + c$

III- Savoir reconnaître une formule composée

Dans le tableau suivant, u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

f	F	Conditions
$k.u', k$ réel	$k.u$	
$u' + v'$	$u + v$	
$u'.v + u.v'$	$u.v$	
$\frac{u'.v - uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	v ne s'annule pas sur I
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$	$n \geq 1$
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$	$n \leq -2$ et u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	u est positive et ne s'annule pas sur I
$u'\sqrt{u}$	$\frac{2}{3} u\sqrt{u}$	u est positive sur I .

IV- Calcul de primitives de fonctions trigonométriques

Exemple 1 :

Soit $f(x) = \cos^2 x \cdot \sin^3 x$

- Montrer que $f(x) = \sin x (\cos^2 x - \cos^4 x)$.
- Calculer alors toutes les primitives de f sur \mathbb{R} .

Solution:

- Pour tout x réel,

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2 x \cdot \sin^3 x = \sin x (\cos^2 x \cdot \sin^2 x) \\ &= \sin x \left[\cos^2 x (1 - \cos^2 x) \right] = \sin x (\cos^2 x - \cos^4 x) \end{aligned}$$

- Pour tout x réel, $f(x) = \sin x (\cos^2 x - \cos^4 x) = \sin x \cdot \cos^2 x - \sin x \cdot \cos^4 x$

Les primitives de f sur \mathbb{R} sont les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + c, c \in \mathbb{R}$

Primitives

Remarque : ici il s'agit de calculer les primitives des fonctions du type $\cos^n x \cdot \sin^m x$ avec **n ou m impair**. La méthode de calcul est **toujours** la même et est basée sur la formule $\cos^2 + \sin^2 x = 1$.

Exemple 2 :

Soit $f(x) = \cos^2 x \sin^4 x$.

- a) Montrer que, pour tout x réel, $f(x) = \frac{1}{32}(\cos 6x - 2\cos 4x - \cos 2x + 2)$
 b) Calculer alors toutes les primitives de f sur \mathbb{R} .

Solution:

Pour tout x réel,

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2 x \cdot \sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{64} (e^{ix} + e^{-ix})^2 (e^{ix} - e^{-ix})^4 \\ &= \frac{1}{64} [(e^{ix} + e^{-ix})(e^{ix} - e^{-ix})]^2 (e^{ix} - e^{-ix})^2 = \frac{1}{64} (e^{2ix} - e^{-2ix})^2 (e^{ix} - e^{-ix})^2 \\ &= \frac{1}{64} (e^{4ix} - 2 + e^{-4ix})(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}) \\ &= \frac{1}{64} (e^{6ix} - 2e^{4ix} + e^{2ix} - 2e^{2ix} + 4 - 2e^{-2ix} + e^{-2ix} - 2e^{-4ix} + e^{-6ix}) \\ &= \frac{1}{64} [(e^{6ix} + e^{-6ix}) - 2(e^{4ix} + e^{-4ix}) - (e^{2ix} + e^{-2ix}) + 4] \\ &= \frac{1}{64} (2\cos 6x - 4\cos 4x - 2\cos 2x + 4) \\ &= \frac{1}{32} (\cos 6x - 2\cos 4x - \cos 2x + 2) \end{aligned}$$

- c) Les primitives de f sur \mathbb{R} sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{32} \left(\frac{1}{6} \sin 6x - \frac{1}{2} \sin 4x - \frac{1}{2} \sin 2x + 2x \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Remarque : ici il s'agit de calculer les primitives des fonctions du type $\cos^n x \cdot \sin^m x$ avec **n et m pairs**. La méthode de calcul est **toujours** la même et est basée sur la linéarisation.

V- Calcul de primitives de fonctions rationnelles

Exemple 1:

Soit $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3}{(x-1)^2}$.

- a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$,
 $f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}$.
 b) Calculer toutes les primitives de f sur $]-\infty, 1[$.

Solution:

- a) On remarque que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$,



Primitives

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3}{(x-1)^2} = \frac{2(x^2 - 2x + 1) + 1}{(x-1)^2} = 2 + \frac{1}{(x-1)^2} \quad \text{ainsi } a = 2 \text{ et } b = 1.$$

b) Les primitives de f sur $]-\infty, 1[$ sont $x \mapsto 2x - \frac{1}{x-1} + c$, $c \in \mathbb{R}$

Exemple 2:

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^5 - 2x^3 + 5x}{(x^2 - 1)^2}$.

1. Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$f(x) = ax + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x+1)^2}.$$

2. Déterminer la primitive F de f sur $]-1, 1[$ qui s'annule en 0.

Solution:

1. Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x+1)^2} = \frac{ax(x^2-1)^2 + b(x+1)^2 + c(x-1)^2}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{ax(x^2-1)^2 + b(x+1)^2 + c(x-1)^2}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{ax(x^4 - 2x^2 + 1) + b(x^2 + 2x + 1) + c(x^2 - 2x + 1)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{ax^5 - 2ax^3 + ax + bx^2 + 2bx + b + cx^2 - 2cx + c}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{ax^5 - 2ax^3 + (b+c)x^2 + (a+2b-2c)x + b+c}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

$$D'où \begin{cases} a = 1 \\ -2a = -2 \\ b + c = 0 \\ a + 2b - 2c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + c = 0 \\ b - c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}.$$

2. Comme pour tout x de $]-1, 1[$, $f(x) = x + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$ alors toute primitive F de f sur

$$]-1, 1[\text{ s'écrit } F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + c, \text{ où } c \in \mathbb{R}.$$

Pour que F soit la primitive de f sur $]-1, 1[$ qui s'annule en 0, il faut que $F(0) = 0$ d'où $c = -2$.

$$\text{Ainsi, pour tout } x \text{ de }]-1, 1[, F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$