

## Théorème des valeurs intermédiaires

### Comment appliquer le théorème des « valeurs intermédiaires » ?

#### Méthode

Le théorème dit « des valeurs intermédiaires » permet de démontrer qu'une fonction prend au moins une fois une valeur donnée, c'est à dire de justifier l'existence de solution(s) pour une équation du type  $f(x) = k$ .

Il faut pour cela que la fonction soit continue sur l'intervalle considéré ( ce qui est le cas pour la plupart des fonctions étudiées) et que l'on trouve deux réels  $a$  et  $b$  dont les images  $f(a)$  et  $f(b)$  encadrent  $k$  c'est-à-dire :

$$f(a) < k < f(b) \quad \text{ou} \quad f(b) < k < f(a).$$

Si l'intervalle est donné , il suffit de calculer les images des bornes ( ou éventuellement les limites ) .

Si il n'y a aucune indication d'intervalle , l'image de 0 ( si elle existe ) est simple à calculer, et en général des considérations de signe ou d'ordre de grandeur permettent de trouver rapidement une autre valeur ( en général entière )

Il est bien entendu conseillé **d'utiliser la calculatrice et sa fonction « tableau »** pour rechercher ces valeurs.

#### Applications

- 1) Démontrer que l'équation  $x^4 + 3x^2 - 2x + 1 = 4$  admet au moins une solution dans  $[-1;0]$ .
- 2) Démontrer que l'équation  $\sqrt{x-3} = \frac{10}{x^2}$  admet au moins une solution dans  $[3; +\infty[$ .
- 3) Démontrer que l'équation  $\cos x = \frac{x^2}{2}$  admet au moins une solution dans  $\mathbb{R}$ .

#### Réponses

- 1) La fonction  $f : x \mapsto x^4 + 3x^2 - 2x + 1$  est une fonction polynôme donc  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

$$f(-1) = 7 \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \quad \text{donc} \quad f(0) < 4 < f(-1).$$

Donc l'équation  $f(x) = 4$  admet au moins une solution dans l'intervalle  $[-1, 0]$ .

- 2) Pour tout  $x$  de  $[3; +\infty[$ ,  $\sqrt{x-3} = \frac{10}{x^2} \Leftrightarrow x^2 \sqrt{x-3} = 10$

$$\text{Soit } f(x) = x^2 \sqrt{x-3} \text{ et } k = 10.$$

$f$  est le produit de deux fonctions continues sur  $[3; +\infty[$  donc  $f$  est continue sur  $[3; +\infty[$ .

On a :  $f(3) = 0$  et comme  $f(4) = 16$  alors  $f(3) < 10 < f(4)$ .

D'où, l'équation  $f(x) = 10$  admet au moins une solution dans  $[3; 4]$  ou encore dans  $[3; +\infty[$ .

- 3) En posant  $f(x) = \cos x - \frac{x^2}{2}$ , l'équation devient équivalente à l'équation  $f(x) = 0$ .

$f$  est la différence de deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

$$\text{On a : } f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{8} \quad \text{donc} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 < f(0).$$

D'où l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution dans  $[0; \frac{\pi}{2}]$  ou encore dans  $\mathbb{R}$ .

## Théorème des valeurs intermédiaires

### Comment préciser le nombre de solution(s) d'une équation du type $f(x) = k$ ?

#### Méthode

Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires ou théorème de la bijection permet de prouver l'existence d'une solution unique à une équation du type  $f(x) = k$  sur un intervalle donné.

Pour déterminer le nombre de solution(s) d'une telle équation, on doit appliquer une ou plusieurs fois ce théorème, sur chaque intervalle qui vérifie les hypothèses. La fonction doit être continue et strictement monotone sur l'intervalle considéré (une étude préalable des variations est donc nécessaire).

Enfin, le réel  $k$  doit être compris entre les images ou les limites des bornes de l'intervalle.

#### Applications

1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ .

- a) Etudier les variations de la fonction  $f$
- b) Déterminer le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 0$ .

2) Montrer que l'équation  $\frac{-1}{3}x^3 + x^2 + 3 = 0$  admet une et une seule équation dans  $\mathbb{R}$ .

#### Réponses :

1) a) On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

$f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a pour tout  $x$  réel,  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ .

On remarque que :  $f'(x) = 0$  admet les solutions  $x' = -1$  et  $x'' = 3$ .

Dressons le tableau de variation de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$15$	$-17$	$+\infty$	

b)  $f$  est continue et strictement croissante sur  $]-\infty; -1]$ , comme  $0 \in ]-\infty, 15]$  alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]-\infty, -1]$ .

$f$  est continue et strictement décroissante sur  $[-1; 3]$ , comme  $0 \in [-17, 15]$  alors

l'équation  $f(x) = 0$  admet aussi une seule solution  $\beta$  dans  $[-1; 3]$ .

$f$  est continue et strictement croissante sur  $[3, +\infty[$ , comme  $0 \in [-17, +\infty[$  alors

l'équation  $f(x) = 0$  admet encore une seule solution  $\gamma$  dans  $[3, +\infty[$ .

Ainsi, l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  exactement trois solutions  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  tels que  $\alpha < -1 < \beta < 3 < \gamma$ .

2) On pose  $f(x) = \frac{-1}{3}x^3 + x^2 + 3$ .

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{3}x^3 = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{3}x^3 = +\infty$

## Théorème des valeurs intermédiaires

$f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a pour tout  $x$  réel ,  $f'(x) = -x^2 + 2x = -x(x-2)$ .  
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = 2$ .

Dressons le tableau de variation de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	$+\infty$	$3$	$\frac{13}{3}$	$-\infty$

$0 \notin [3, +\infty[$  donc l'équation  $f(x) = 0$  n'admet pas de solutions dans  $]-\infty, 0]$

$0 \notin \left[3, \frac{13}{3}\right]$  donc l'équation  $f(x) = 0$  n'admet pas de solutions dans  $[0, 2]$

$f$  est continue et strictement décroissante sur  $[2, +\infty[$  , comme  $0 \in [2, +\infty[$  alors l'équation  $f(x) = 0$  admet aussi une seule solution  $\alpha$  dans  $[2, +\infty[$  .

Ainsi l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$  .

### Comment donner une valeur approchée d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$ ?

#### Méthode

Pour déterminer une valeur approchée d'une solution  $\alpha$  de l'équation  $f(x) = k$  , il suffit de déterminer deux réels  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $f(x_1) < k < f(x_2)$  .

Désignons par  $I$  l'intervalle fermé borné dont les bornes sont  $x_1$  et  $x_2$  .

Si  $f$  est strictement croissante sur  $I$ , alors on en déduit :  $x_1 < \alpha < x_2$  .

Si  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ , alors on en déduit :  $x_1 > \alpha > x_2$  .

A partir de l'encadrement d'amplitude recherchée, on en déduit une valeur approchée de  $\alpha$  à la précision demandée .

#### Applications

- 1) Montrer que l'équation  $x^3 + 2x^2 + 1 = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[-3 ; -2]$  et déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près par défaut .
- 2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1 ; 2]$  par  $f(x) = x^4 - x^2 + 1$  .
  - a) Etudier les variations de  $f$
  - b) Montrer que l'équation  $f(x) = 3$  admet une solution et une seule,  $\alpha$ , dans l'intervalle  $]1 ; 2[$  .
  - c) Donner, au moyen de la calculatrice, une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près.

## Théorème des valeurs intermédiaires

### Réponses

1) Posons  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ , avec  $x \in [-3, -2]$ .

$f$  est continue et dérivable sur  $[-3, -2]$  et pour tout  $x$  de  $[-3, -2]$ ,

$$f'(x) = 3x^2 + 4x = 3x \left( x + \frac{4}{3} \right) > 0 \text{ donc } f \text{ est strictement croissante sur } [-3; -2].$$

$f(-3) = -8$  et  $f(-2) = 1$ . Comme  $0 \in [f(-3); f(-2)]$  alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[-3; -2]$ .

On a :  $f(-3) = -8$  et  $f(-2) = 1$ .

$$f(-2,5) = -2,125 \quad \text{donc} \quad -2,5 < \alpha < -2$$

$$f(-2,25) \approx -0,2656 \quad \text{donc} \quad -2,25 < \alpha < -2.$$

$$f(-2,125) \approx 0,4356 \quad \text{donc} \quad -2,25 < \alpha < -2,125.$$

$$f(-2,18) \approx 0,1446 \quad \text{donc} \quad -2,25 < \alpha < -2,18.$$

$$f(-2,21) \approx -0,0257 \quad \text{donc} \quad -2,125 < \alpha < -2,18.$$

$$f(-2,20) \approx 0,032 \quad \text{donc} \quad -2,21 < \alpha < -2,20.$$

Donc  $-2,21$  est une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près par défaut.

2) a)  $f$  est continue et dérivable sur  $[1, 2]$  et pour tout  $x$  de  $[1, 2]$ ,  $f'(x) = 4x^3 - 2x = 4x \left( x^2 - \frac{1}{2} \right)$

$$1 \leq x \leq 2 \quad \text{donc} \quad 1 \leq x^2 \leq 4 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{2} \leq x^2 - \frac{1}{2} \leq \frac{7}{2} \quad \text{donc} \quad x^2 - \frac{1}{2} > 0$$

Or pour tout  $x$  de  $[1, 2]$ ,  $4x > 0$  donc pour tout  $x$  de  $[1, 2]$ ,  $f'(x) > 0$ .

D'où  $f$  est strictement croissante sur  $[1; 2]$ .

b) On a :  $f(1) = 1$  et  $f(2) = 13$ , de plus  $3 \in [f(1); f(2)]$  donc l'équation  $f(x) = 3$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]1; 2[$ .

c) A l'aide de la calculatrice, on obtient  $f(1,4142) \approx 2,9998$  et  $f(1,4143) \approx 3,0007$ .

$$3 \in [f(1,4142); f(1,4143)] \text{ donc } 1,4142 < \alpha < 1,4143.$$

Donc une valeur approchée par défaut de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près est  $1,414$ .