



## Suites adjacentes : cours et applications

### Définition:

On dit que deux suites réelles  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes si elles vérifient les propriétés suivantes :

1.  $(u_n)$  est croissante, et  $(v_n)$  est décroissante ;
2. la suite  $(v_n - u_n)$  tend vers zéro.

### Théorème:

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

### Démonstration:

Il suffit de montrer que les suites sont bornées

en fait il suffit de montrer que l'une d'elles est bornée, car  $(v_n - u_n)$  l'est aussi (elle converge, par hypothèse), et donc l'autre devra alors aussi être bornée par addition ou soustraction.

Montrons donc que  $(u_n)$  est bornée. D'abord elle est évidemment minorée par  $u_0$ , puisqu'elle est croissante :  $u_n \geq u_{n-1} \geq u_{n-2} \geq \dots \geq u_1 \geq u_0$  (et de même  $(v_n)$  est minorée par  $v_0$ ). Mais on souhaite plutôt savoir qu'elle est majorée.

Comme  $(v_n - u_n)$  converge, elle est bornée, donc il existe  $\mu \geq 0$  tel que  $|v_n - u_n| \leq \mu$  pour tout  $n$ . Cela implique notamment que  $u_n \leq \mu + v_n$  ; mais  $v_n \leq v_0$ , donc  $u_n \leq \mu + v_0$  pour tout  $n$ , ce qui termine la démonstration.



## Suites adjacentes : cours et applications

### Exercice 1

Démontrer que les 2 suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = 1 + \frac{1}{n!}$  et  $v_n = \frac{n}{n+1}$  sont adjacentes.

### Exercice 2

Soit la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

Démontrer que les deux suites  $(u_{2p})$  et  $(u_{2p+1})$  sont adjacentes.

En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

### Exercice 3

Démontrer que les 2 suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}$  et  $v_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} + \frac{1}{n}$  sont adjacentes.

Vérifier à l'aide d'une calculatrice que leur limite commune a pour valeur approchée  $\frac{\pi^2}{6}$

### Exercice 4

Démontrer que les 2 suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!}$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$  sont adjacentes.

On admettra que leur limite commune est  $e$ , la base du logarithme népérien.  $e \approx 2,718$ .



## Suites adjacentes : cours et applications

### Corrigé 1 :

démontrons que  $(u_n)$  est décroissante :

$$\begin{aligned} \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n &= 1 + \frac{1}{(n+1)!} - \left(1 + \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!} \\ &= -\frac{n}{(n+1)!} \leq 0 \text{ car } n \geq 0 \text{ et } (n+1)! > 0 \end{aligned}$$

donc  $(u_n)$  est décroissante.

démontrons que  $(v_n)$  est croissante :

$$\begin{aligned} \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)(n+1) - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \\ &\text{car } 1 > 0 \text{ et } (n+2)(n+1) > 0 \text{ puisque } n \geq 0 \end{aligned}$$

donc  $(v_n)$  est croissante.

démontrons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$

$$u_n - v_n = 1 + \frac{1}{n!} - \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = \text{tend vers } 0 \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty \text{ car } \lim_{n \rightarrow \infty} n! = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n} = 1$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$$

$(u_n)$  est décroissante et  $(v_n)$  est croissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$  donc les 2 suites  $(u_n)$  et

$(v_n)$  sont adjacentes

### Corrigé 2:

démontrons que  $(u_{2p})$  est décroissante :

$$\begin{aligned} \text{pour tout } p \text{ de } \mathbb{N}^*, u_{2(p+1)} - u_{2p} &= 1 + \frac{(-1)^{2(p+1)}}{2(p+1)} - 1 - \frac{(-1)^{2p}}{2p} = \frac{1}{2(p+1)} - \frac{1}{2p} = \frac{2p - (2p+2)}{2p(2p+2)} \\ &= -\frac{2}{2p(2p+1)} < 0 \text{ car } 2 > 0 \text{ et } 2p(2p+1) > 0 \text{ car } p > 0 \end{aligned}$$

donc  $(u_{2p})$  est décroissante.

démontrons que  $(u_{2p+1})$  est croissante :

$$\begin{aligned} \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{2(p+1)+1} - u_{2p+1} &= 1 + \frac{(-1)^{2p+3}}{2p+3} - 1 - \frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1} = \frac{-1}{2p+3} - \frac{-1}{2p+1} = \frac{-2p-1+2p+3}{(2p+3)(2p+1)} \\ &= \frac{2}{(2p+3)(2p+1)} < 0 \text{ car } 2 > 0 \text{ et } (2p+3)(2p+1) > 0 \text{ car } p > 0 \end{aligned}$$

donc  $(u_{2p+1})$  est croissante.



## Suites adjacentes : cours et applications

démontrons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2p} - u_{2p+1} = 0$

$$u_{2p} - u_{2p+1} = 1 + \frac{(-1)^{2p}}{2p} - 1 - \frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1} = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p+1} = \frac{2p+1+2p}{2p(2p+1)} = \frac{4p+1}{4p^2+2p}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4p+1}{4p^2+2p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2p} - u_{2p+1} = 0$$

$(u_{2p})$  est décroissante et  $(u_{2p+1})$  est croissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2p} - u_{2p+1} = 0$  donc les 2 suites

$(u_{2p})$  et  $(u_{2p+1})$  sont adjacentes

### Corrigé 3:

démontrons que  $(u_n)$  est croissante :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

donc  $(u_n)$  est croissante.

démontrons que  $(v_n)$  est décroissante :

$$\begin{aligned} \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

donc  $(v_n)$  est décroissante.

démontrons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n - v_n = 0$

$$u_n - v_n = \frac{1}{n}. \text{ Or } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ car } \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n - v_n = 0$$

$(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  est décroissante et  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n - v_n = 0$  donc les 2 suites  $(u_n)$  et

$(v_n)$  sont adjacentes



## Suites adjacentes : cours et applications

### Corrigé 4:

démontrons que  $(u_n)$  est croissante :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \text{ car } 1 > 0 \text{ et } (n+1)! > 0$$

donc  $(u_n)$  est croissante.

démontrons que  $(v_n)$  est décroissante :

$$\begin{aligned} \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1) * (n+1)!} - u_n - \frac{1}{n * n!} \\ &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1) * (n+1)!} - \frac{1}{n * n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) * (n+1)!} - \frac{1}{n * n!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1) * (n+1)!} = -\frac{1}{n(n+1) * (n+1)!} < 0 \end{aligned}$$

donc  $(v_n)$  est décroissante.

démontrons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n - v_n = 0$

$$u_n - v_n = \frac{1}{n * n!}. \text{ Or } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n * n!} = 0 \text{ car } \lim_{n \rightarrow \infty} n * n! = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n - v_n = 0$$

$(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  est décroissante et  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n - v_n = 0$  donc les 2 suites  $(u_n)$  et

$(v_n)$  sont adjacentes