Produit scalaire - Produit vectoriel dans l'Espace

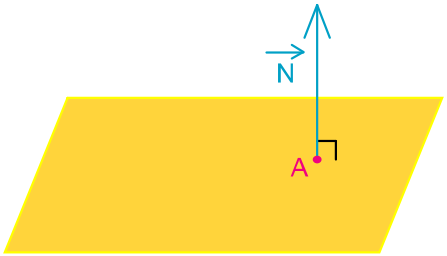
Soient A, B et C trois points quelconques de l'espace.

On a : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \hat{BAC}$

Soient $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base orthonormée de l'espace et $\vec{u}(x,y,z)$, $\vec{v}(x',y',z')$ deux vecteurs de l'espace. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{N}$, est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} \cdot \vec{N} = 0$



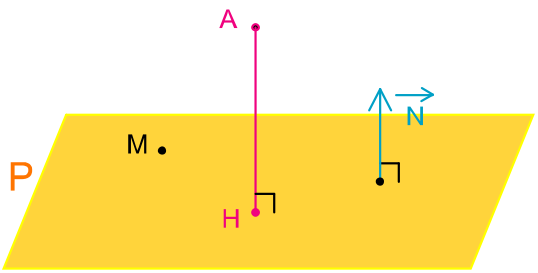
Soit le plan P d'équation : a x + b y + c z + d = 0 avec (a,b,c) ≠ (0,0,0).

Le vecteur $\vec{N}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

Produit scalaire - Produit vectoriel dans l'Espace

Soient le plan P : a x + b y + c z + d = 0,
$A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et H le projeté orthogonal de A sur P.

Soit M un point de P et $\vec{N}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à P.

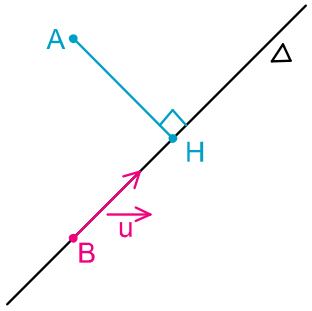


La distance du point A au plan P est le réel défini par :

$$d(A, P) = AH = \frac{\left|\vec{AM} \cdot \vec{N}\right|}{\left\|\vec{N}\right\|} = \frac{\left|a x_A + b y_A + c z_A + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(D) une droite de l'espace de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par B.
A un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur (D).
La distance du point A à la droite (D) est le réel défini par : d(A, (D)) = AH.

$$AH = \frac{\left\|\vec{AB} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}.$$



Définition :

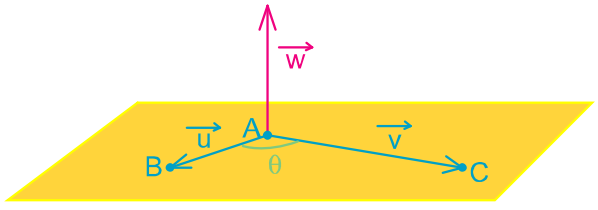
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté et A, B et C trois points tels que $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$. On appel produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :

* Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{w} = \vec{0}$.
* Sinon alors

1/ $\vec{w}$ est normal au plan (ABC)

2/ $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base directe

3/ $\left\|\vec{w}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| \left\|\vec{v}\right\| \sin(\widehat{BAC})$



Produit scalaire - Produit vectoriel dans l'Espace

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de l'espace.

Soit θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$.
On a :

$$\sin\theta = \frac{\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|} \quad \text{et} \quad \cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|}.$$

Dans une base orthonormée directe $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$. On a :

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\vec{k}.$$

$$= (yz'-zy')\vec{i} - (xz'-zx')\vec{j} + (xy'-yx')\vec{k}$$

Soit P un plan de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
$\vec{u}\wedge\vec{v}$ est un vecteur normal au plan P.

Soient A, B et C trois points de l'espace.
L'aire du triangle ABC est : $\frac{1}{2}\left\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right\|$.

Le volume d'un parallélépipède ABCDEFGH est $\mathcal{V} = \left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AE}\right|$.

Le volume d'un un tétraèdre ABCD est $\mathcal{V} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{BA}\right|$.

Le volume d'un un tétraèdre ABCD est $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\left\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right\|.DH$

où H est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).