Calcul intégral et primitive

1 Définition de l'intégrale

f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.

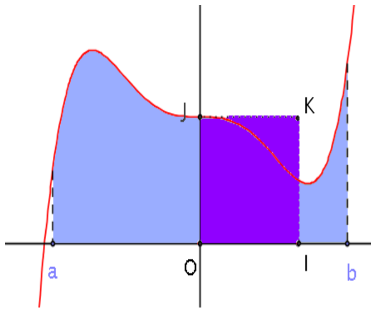
C est la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

Soit D le domaine entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

L'intégrale de a à b de la fonction f qui est notée $\int_a^b f(x)dx$, est l'aire du domaine D.

Cette aire est exprimée en unité d'aire (notée u.a.) qui est l'aire du rectangle OIKJ généralement en cm^2.

Les réels a et b s'appellent les bornes de l'intégrale.



Dans le cas d'une fonction continue et négative

sur un intervalle $[a\,;b]$ alors :

$\int_a^b f(x)dx$ = - aire(D) ou $\int_a^b f(x)dx=-\int_a^b |f(x)|dx$

Valeur moyenne d'une fonction continue sur $[a\,;b]$:

La valeur moyenne de la fonction f sur $[a\,;b]$ est le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Aire comprise entre deux courbes :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et telles que $0\leq g\leq f$.
Soient a et b deux réels appartenant à l'intervalle I.
Alors l'aire comprise entre les deux courbes est $\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

2 Propriétés de l'intégrale

Positivité :

Si f est continue et positive sur $[a,b]$ avec $a\leq b$, alors $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.

Si f est continue et négative sur $[a,b]$ avec $a\leq b$, alors $\int_a^b f(x)dx\leq 0$.

Ordre :

f et g sont des fonctions continues sur $[a,b]$ avec $a\leq b$.

$f(x)\leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

Calcul intégral et primitive

Relation de Chasles :

Soit f une fonction continue sur I.
Soient a, b et c des réels appartenant à I.
Alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Linéarité :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec $a \le b$.
$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

λ réel , $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

Inégalité de la moyenne :

m et M sont des réels tels que pour tout x de $[a;b]$, $m \le f(x) \le M$ (avec $a<b$).
Alors $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$.

3 Primitives

Primitives des fonctions usuelles : ($C \in \mathbb{R}$)

$f(x)$	$F(x)$	D_f
k ($k \in \mathbb{R}$)	$kx + C$	$\mathbb{R}$
x^n , $n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$, $n \neq 1$	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}+C$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x+C	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\mathbb{R}$
$tan^2\ x + 1 = \frac{1}{cos^2\ x}$	$\tan x + C$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi ; \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Opérations sur les primitives :

F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle I.

- $F+G$ est une primitive de la fonction $f+g$ sur I.
- $\lambda \in \mathbb{R}$, λF est une primitive de λf sur I.

Calcul intégral et primitive

u est une fonction dérivable sur I.

f	F	Conditions sur u
$u'u^n$, $n\in\mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+C$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+C$	$\forall x\in I, u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$, $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}}+C$	$\forall x\in I, u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+C$	$\forall x\in I, u(x)>0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u+C$	$\forall x\in I, u(x)>0$
$u'e^u$	e^u+C	
$u'\cdot(v'\circ u)$	$v\circ u$	

4 Intégrales et primitives

Soit I un intervalle contenant deux réels a et b et sur lequel f est continue.
$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ avec F une primitive de f sur I.
Se note aussi : $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b$

La fonction $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

Exemple :

Pour tout x strictement positif , ln x = $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.

A retenir

$$\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$$

Calcul intégral et primitive

5 Intégration par partie

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I ayant pour dérivées respectives les fonctions u' et v' continues sur I.

$\forall a, b \in I$, $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$

Si l'intégral est $\int_a^b \ln x \,.\, g(x)\,dx$, alors on pose : $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = g(x)$.

Si l'intégral est $\int_a^b e^x \,.\, g(x)\,dx$, alors on pose : $u(x) = g(x)$ et $v'(x) = e^x$.

Si l'intégral est $\int_a^b \sin x.\, g(x)dx$, alors on pose : $u(x) = g(x)$ et $v'(x) = \sin x$.

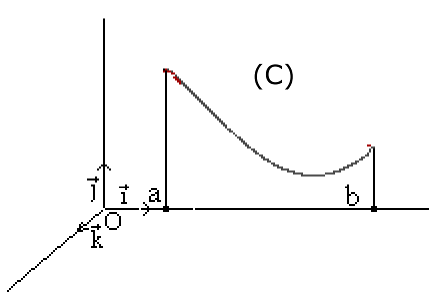
Si l'intégral est $\int_a^b \cos x.\, g(x)dx$, alors on pose : $u(x) = g(x)$ et $v'(x) = \cos x$.

6 Calcul de volume

Dans le cas d'une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors le volume engengré par rotation de la courbe (C) au tour de l'axe des abscisses est :

$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$ uv uv est l'unité de vôlume (si l'unité de longueur sur chacun des axes est a cm alors uv = a^3 cm^3 .

Courbe



Solide de révolution engendré par cette courbe