



Accroissements finis

Théorème de Rolle:

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $a < b$.

Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis:

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $a < b$, alors il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que : $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Inégalités des accroissements finis:

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ tels que $a < b$.

S'il existe deux réels m et M vérifiant : $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout x de $]a, b[$,

alors on a : $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$

Corollaire des inégalités des accroissements finis:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} telle que pour tout x de I , il existe un réel k strictement positif tel que : $|f'(x)| \leq k$ alors ; Pour tous a et b réels de I on a :

$$|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|.$$

Exercices d'applications

Exercices 1

Soit la fonction $f(x) = \sin 2x - 3 \cos x$.

1. Justifier le fait que f est dérivable sur \mathbb{R} , et calculer $f'(x)$ pour tout x réel.
2. Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis qu'il existe un réel de c de

$$\left] \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ tel que : } 2 \cos 2c + 3 \sin c = \frac{9 - 3\sqrt{3}}{\pi}.$$



Accroissements finis

Solution:

Les fonctions $x \mapsto \sin 2x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues et dérivables sur \mathbb{R} .

Pour tout x réel, $f'(x) = 2 \cos 2x + 3 \sin x$.

Si f est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, il existe un $c \in]a, b[$ tel que l'on ait : $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

f est continue sur \mathbb{R} , donc sur l'intervalle fermé $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, dérivable sur \mathbb{R} , donc sur l'intervalle ouvert $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Le théorème des accroissements finis permet alors d'affirmer qu'il existe $c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}(3 - \sqrt{3})}{\frac{\pi}{6}} = \frac{9 - 3\sqrt{3}}{\pi}.$$

Exercice 2

- Démontrer que pour tout x réel, $|\sin x| \leq |x|$.
- Quelle est la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = n \sin \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution:

- La fonction sinus est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x réel, $\sin'(x) = \cos x$ donc pour tout x réel, $|\cos x| \leq 1$.

Ainsi, pour tout x réel, $|\sin x - \sin 0| \leq |x - 0| \Leftrightarrow |\sin x| \leq |x|$.

- On peut écrire : pour tout n de \mathbb{N}^* , $\left|\sin \frac{1}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ d'où $|u_n| \leq \frac{1}{n}$.

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.



Accroissements finis

Exercice 3

Soit f une fonction continue sur $]0, +\infty[$, dérivable dans $]0, +\infty[$, telle que $f(0) = 0$.

On désigne par g la fonction définie, pour tout $x > 0$, par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

1. Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $g'(x)$ pour tout $x > 0$.
2. Montrer que si f' est croissante sur $]0, +\infty[$, il en est de même de g .

Solution.

1. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et la fonction $x \mapsto x$ est dérivable et non nulle sur $]0, +\infty[$ donc la fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Pour tout x de $]0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{1}{x} f'(x) - \frac{1}{x^2} f(x)$.

2. Soient x et y des éléments quelconques de $]0, +\infty[$, vérifiant $x < y$.

Comme g est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$, le **théorème des accroissements**

finis indique qu'il existe un c tel que :

$$\begin{aligned} g(y) &= g(x) + (y-x) g'(c), \text{ avec } x < c < y. \\ &= g(x) + (y-x) \frac{1}{c} (f'(c) - g(c)) \\ &= g(x) + \frac{1}{c} (y-x) \left(f'(c) - \frac{f(c)}{c} \right) \end{aligned}$$

Comme f est continue sur $[0, c]$ et dérivable sur $]0, c[$, et que $f(0) = 0$, le **théorème des accroissements finis** indique qu'il existe un d tel que :

$$f'(d) = \frac{f(c)}{c}, \text{ avec } 0 < d < c, \text{ et } g(y) = g(x) + \frac{1}{c} (y-x) (f'(c) - f'(d))$$

Comme f' est croissante sur $]0, +\infty[$: $0 < d < c \Rightarrow f'(d) \leq f'(c)$.

Il en résulte : $\frac{1}{c} (y-x) (f'(c) - f'(d)) \geq 0$ (produit de trois nombres positifs).

et $g(y) = g(x) + \frac{1}{c} (y-x) (f'(c) - f'(d)) \geq g(x)$.

Ainsi la relation $0 < x < y$ implique, lorsque f' est croissante sur $]0, +\infty[$, la relation

$$g(x) \leq g(y).$$

C'est dire que g est croissante sur $]0, +\infty[$.